目　　次

第 一 篇

常微分方程发展的历史概论

第一章 实域解析理论

§1. 常微分方程的产生及发展阶段

常微分方程是数学中一个古老的分支，也是一个仍然充满活力的数学分支。

常微分方程产生于三百多年前.当时微积分还未发明，但是，由于历算、航海和力学等的需要，人们从实质上说已经在建立和求解常微分方程了。最早的例子是计算对数表。

在微积分发明以后，牛顿(Newton 1642-1727)力学第二定律的数学表达形式便是常微分方程，在此基础上天体力学的数学表达形式便是常微分方程，并且是在实数域中的方程。在十七世纪末和十八世纪，主要的问题是求用初等解析函数表示的通解，这是常微分方程发展的第一阶段，即实域解析理论的阶段。

作为数学中的一个分支，常微分方程的发展也必然受到数学内部其他分支发展的影响。十九世纪初，严格的极限概念、收敛概念在分析中建立起来，复变函数的研究得到大发展，其代表人物之一为柯西(Cauchy 1789-1857)。柯西将常微分方程求解的

研究，由实域转到复域，严格论证了幂级数解的收敛性，从而严格论证了解析的常微分方程的解析解的存在性；这样，柯西便开创了常微分方程发展的第二个阶段，即复域解析理论的阶段。在问题的提法上，也有变化，由求通解转到求定解，即求已知初值的解。

类似于代数方程的发展，常微分方程的发展也经过曲折的道路。五次以上代数方程一般没有根式解，黎卡提型的常微分方程一般也没有初等解。在不求解的条件下，斯图谟(Sturm)给出了实根个数的判定法，这就引起庞加莱(Poincarè 1854-1912)的创造性工作。庞加莱将微分方程的研究由复域又转回实域，由解析表达式转为曲线，由定解转到曲线族，在不求解的情况下，由曲线族的定性行为得到原来的方程解的性质。这样就开创了常微分方程发展史上的第三个阶段——实域定性理论。

以下先叙述实域解析理论的历史发展。

§2. 微积分发明前的情况

远在微积分发明以前，人类由于生产实践的需要，已经用了微分方程的实质去解决实际问题，虽然当时连微积分的符号也还没有。

由于航海及天文计算的需要，对数表的计算提上了日程，为了要对连续变化的数值给出它的对数的定义，苏格兰数学家约翰·纳皮尔(John Napier 1550-1617)给出了下面的定义：

取相交于O点的两轴OX及OY，每轴上分别取一个运动的点M及N(如图1)，N由O出发沿OY以等速率v运动，M由OX上一点A出发，以变速率u向O运动，u之变化规律为：当M在A点时$u=v$，其后u与OM之长成比例减少。为了对数表的精度，纳皮尔取$OA=10^7$。这样，ON和OM便有对数关系；用现代的记号，取$OM=x$，$ON=y$，则有微分方程组

$$\frac{dy}{dt}=v,$$

$$\frac{dx}{dt}=-v\frac{x}{10^7},$$

及初值 $t=0, x=10^7, y=0$. 由此解得关系

$$y=10^7\ln\frac{10^7}{x},$$

这里取 $OA=10^7$ 是因为计算八位对数表之故。

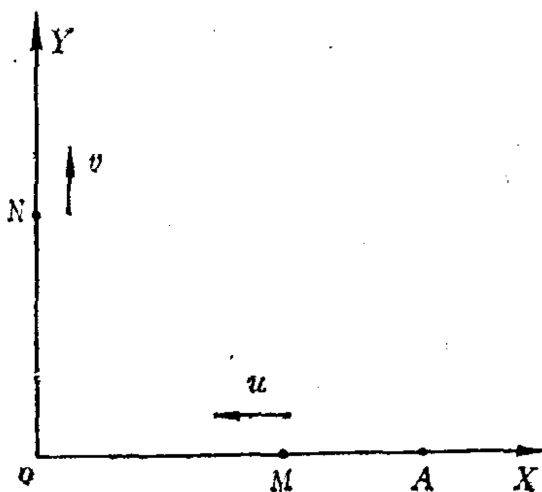


图 1

伽利略 (Galileo 1564-1642) 在研究无阻力的自由落体运动时实际上就等于在解微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.$$

这时虽然还没有发明微积分，但是由直角三角形面积的计算，他已得到解

$$x=\frac{1}{2}gt^2.$$

笛卡儿(Descartes 1596-1650)解决了几何光学中的“切线的反问题”。光线由一定点出发，经过镜面反射，反射规律是入射角等于反射角；已知镜面，求出切线，即可求出反射线，这便是切线问题，其实质是求微商。现在，镜面未知，要求从一定点出发的光线经过镜面反射，集中到另一定点，要求镜面的形式，这便是“切线的反问题”之一，其实质是解微分方程：设两定点在(x, y)平面上的坐标为$(1, 0)$及$(-1, 0)$，则方程为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{x^2-y^2-1}{xy}\right)\frac{dy}{dx}-1=0,$$

其解为以$(1,0)$及$(-1,0)$为焦点的任何椭圆或双曲线；前者产生

实象，后者得到虚象；将这个二次曲线绕 x 轴旋转，即得到椭球面或双曲面。当然，笛卡尔不是用解微分方程的办法来得到结果的，因为当时还没有微积分，他是从微小量之间的相关性质来得出这一结果的。

以上的例子只是用来说明生产实践与科学实践为微分方程提供了无限丰富的研究泉源，甚至在微积分发明之前，人类的科学实践中便已经不断遇到微分方程及其求解的问题，同时也说明了任何重大发展实际上是在历史所积累的大量工作的基础上发展起来的。诚然，由于人类的创造性劳动使得这些大量积累发生质变，这样，历史就自然进入常微分方程的发生及其发展的阶段。

§3. 常微分方程的创立及实域解析理论的发展

天文学和力学的需要，以及数学中“微小量”概念的出现推动了牛顿及莱布尼兹（Leibniz 1646-1716）发明了微积分，同时也产生了微分方程，最初是常微分方程。牛顿的“流数术”发明于 1665 年。1676 年牛顿用无限级数解了一个微分方程，但他的这些工作到 1693 年才发表．莱布尼兹的工作中第一次出现微分方程也是在 1676 年，而他的微积分计算则是 1684 年发表的。现在我们通用的微积分记号，来源于莱布尼兹。

牛顿力学的第二定律为：动量随时间的变化率等于力，其数学表示形式为

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\vec{F}\ ,$$

这便是常微分方程。要求出运动轨迹则要求解这个方程。

当时，在牛顿之前，万有引力的具体表示关系是不清楚的，要研究行星在引力作用下的运动，不知道 $\vec{F}$，便建立不起微分方程，更谈不上求解这一微分方程了。

但是，在浩瀚的观测材料的基础上，刻普勒（Kepler 1571-

1630)已经总结出了经验性的行星运动三定律，即：

每个行星的轨道是一条以太阳为一焦点的椭圆；每个行星与太阳的联线所扫过的面积的速度是一个常数；任何行星的周期的平方除以此行星的椭圆轨道的半长轴的三次方是一个常量。

也就是说，在万有引力 $\vec{F}$ 还不清楚的条件下，这个微分方程的解——一系列的椭圆，以及它的许多性质都已经知道了。利用已知解来决定方程，牛顿导出了万有引力 $\vec{F}$ 是与距离的平方成反比，与质量之乘积成正比。这样，便可将问题全部反转过来，从引力的平方反比性质出发，列出方程

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{R}}{dt}\right)=-\frac{GmM}{|\vec{R}|^2}\ \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|},$$

其中G为万有引力常数，M为太阳质量，m为行星质量，太阳位置取作座标原点时，$\vec{R}$ 为行星的位置。

刻普勒行星运动三定律便可直接由这个微分方程推导出来，从经验规律上升到理论结果．先有经验的解，后有理论的方程，再有理论的解，这就是牛顿万有引力规律发现的实际过程。重温这种历史发展的事实，可以极大地增强从实际工作提升理论成果的人们的信心，这些实际问题都表现为实域中的变量，要求得到“初等解”；也即是，从方程式的系数或系数函数，经过有限次初等运算（包括加、减、乘、除、乘方、开方、对数、指数、微分和积分）来求得方程的解，这便是实域的解析理论的中心问题。

对于实域中的常微分方程求出通解的明显表达公式，成为十七世纪末及十八世纪常微分方程研究的中心工作，在这方面有一系列的重大进展。

莱布尼兹以及伯努利 (Bernoulli) 家族的数学力学家们开始系统地分类研究微分方程的求解方法。

最初莱布尼兹和雅可布·伯努利 (Jacob · Bernoulli 1654-1705)及约翰·伯努利 (Johann Bernoulli 1667-1748) 兄弟研究

了"分离变量法"，接着将这一方法利用变换 $y=ux$，成功地用于齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

即可将 u 和 x 分离变量。进一步，利用变换 $y=uv$，将线性方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

化为可分离变量的类型，求出 u，v．例如从

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}+pv\right)=q$$

取 v 使得

$$\frac{dv}{dx}+pv=0$$

分离变量求出 $v(x)$，然后从

$$v\frac{du}{dx}=q$$

中分离变量求出 $u(x)$。

比线性方程再进一步，他们利用变换 $y^{1-n}=u$ 将现在通称的伯努利方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$$

化为线性方程

$$\frac{du}{dx}+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x)$$

求解。

伯努利家族的一员丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli 1700-1782)对于 ν 是整数时，用初等方法求出了下面的特殊形式的黎卡提(Riccati 1701-1775)方程

$$\frac{dy}{dx}+y^2=1+\frac{\nu(\nu+1)}{x^2}$$

的积分。

这个方程有两个特解

$$y=y_1(x)=\frac{\nu+1}{x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{d^\nu}{d(x^2)^\nu}\left(\frac{e^x}{x}\right)\right)$$

及

$$y=y_2(x)=\frac{\nu+1}{x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{d^\nu}{d(x^2)^\nu}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)\right).$$

而当黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y^2+B(x)y+C(x),$$

已知一个特解 $y_1(x)$ 时，则可用 $z(x)=y(x)-y_1(x)$，将它化为 $\frac{1}{z(x)}$ 的线性方程再加以求解。

进一步阿贝耳(Abel 1802-1829)研究了形如

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y^3+B(x)y^2+C(x)y+D(x)$$

及

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A(x)y^2+B(x)y+C(x)}{y+D(x)}$$

的若干特殊类型，现在通称阿贝耳第一类和第二类方程。但是它已经既不完整，也极烦琐，逐步走入困境。当然，偶然也出现象雅可比(Jacobi 1804-1851)方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(ay+bx+c)-dy-ex-f}{x(ay+bx+c)-gy-hx-k}$$

其中 $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ 为常数。如果其“特征方程”

$$\begin{vmatrix} d-\mu & e & f \\ g & h-\mu & k \\ a & b & c-\mu \end{vmatrix}=0$$

的三根 μ_1，μ_2，μ_3 互不相等，则通解形式可写成下形

$$(\alpha_{11}y+\alpha_{12}x+\alpha_{13})^{(\mu_2-\mu_3)}(\alpha_{21}y+\alpha_{22}x+\alpha_{23})^{(\mu_3-\mu_1)}\cdot(\alpha_{31}y+\alpha_{32}x+\alpha_{33})^{(\mu_1-\mu_2)}=\text{const}.$$

但是，这样的成果使人产生了它是艺术品之感。大量的这类材料集中在卡姆克的著名的《常微分方程手册》当中，看了使人眼花缭乱，但是实质性的发展已经很少，这点我们以后将再回到其原因及统一规律上。

下面转到线性的高次微分方程方面，约翰·伯努利及其后的欧拉(Euler 1707-1783)求解了现在通称的欧拉方程

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_ny=0.$$

欧拉用的办法是用 $x=e^t$，将它化为常系数线性方程

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_0=0,$$

再通过 $y=e^{\lambda t}$ 求解，化为 λ 的代数方程，由此求出通解。

欧拉的重大贡献，在于他第一个考虑到一般的常微分方程的解的存在性，他提出了现在通称的欧拉折线法。这个方法不仅提供了常微分方程解存在性证法的一条道路，而且对现代电子计算机上的数值求解也是非常基本的一条途径。当然，在当时他的证明还没有达到现代分析所要求的严格性，这还得待一个世纪后才产生这样的概念和证明。

达朗贝尔(D'Alembert 1717-1783)得到非齐次线性方程的通解可由齐次线性方程的通解及非齐次线性方程的任一特解之和组成这一基本定理．拉格朗日 (Lagrange 1736-1813) 由齐次线性方程组的通解经过常数变易法可用积分求出非齐次线性方程的特解，由此解决了非齐次线性方程的一般求解问题。

欧拉发现了积分因子的概念，而方程

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$$

是全微分方程的充要条件

$$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$$

由克勒罗(Clairaut 1713-1765)所获得。

我们在此不能再一一列举这些成就，而只想指出，到18世纪末期，常微分方程已经发展成为一个重要的数学分支，并已成为工程技术、物理、力学和天文等学科的基本工具之一。

下面的叙述将转到常微分方程发展的第二阶段，即复域解析理论阶段。

第二章　复域解析理论

§1. 严格理论基础的奠定

十九世纪初期由于工业生产日益精密的要求，以及由于数学各分支在应用方面的大力发展，需要从理论上加以巩固和严格化，整个数学学科向前大跃进了一步，现代分析的概念，复数域的理论等相继建立起来，这方面的主导人物有柯西、高斯(Gauss 1777-1855)、黎曼(Riemann 1826-1866)等人。

柯西开创了复域的解析理论这一新的分支，论证是在复域中进行的。设给定复域微分方程

$$\frac{dw}{dz}=f(w,\ z)=\sum_{0<l,m}a_{lm}z^l w^m$$

幂级数在$|z|\leqslant r_1$，$|w|\leqslant\rho_1$中收敛，要研究初值为$z=0$时$w=0$的解析解

$$w=\sum_{m\geqslant1}b_m z^m$$

的存在性。问题由实域中的通解转到复域中的定解，因此这类定解问题又通称柯西问题，常微分方程中又称初值问题。解法如下：

首先将解代入方程，形式地由a_{lm}决定b_m，其次再求证解级数的收敛性。

为此，首先估计a_{lm}之值，设在$|z|\leqslant r_1$，$|w|\leqslant\rho_1$中

$$|f(w,\ z)|\leqslant M,$$

则可导出柯西等式

$$\sum_{l,m}|a_{lm}|^2 r_1^{2l} s_1^{2m}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r_1e^{i\varphi},\rho_1e^{i\psi})|d\varphi d\psi .$$

由此导出估值

$$|a_{lm}|\leqslant\frac{M}{r_1^l\rho_1^m},$$

进一步作一对比方程，又称长方程

$$\frac{dw}{dz}=F(w,z)=\frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)}=\sum_{0<l,m}A_{lm}z^l w^m.$$

不难求出这个长方程在 $z=0$ 时 $w=0$ 的解为

$$w=\rho_1\left\{1-\sqrt{1+\frac{2Mr_1}{\rho_1}\ln\left(1-\frac{z}{r_1}\right)}\right\}=\sum_{m>1}B_m z^m,$$

在 $|z|\leqslant r_2=r_1(1-e^{-\frac{1}{2M}\frac{\rho_1}{r_1}})$中绝对收敛；进一步可以验证得

$$|a_{lm}|\leqslant A_{lm},\quad |b_m|\leqslant B_m .$$

由此得知原来的级数解 $w=\sum_{m>1}b_m z^m$ 也在 $|z|\leqslant r_2$ 中收敛，定解问题得到严格的解决。

在正常点附近的情形，便这样确定下来。

进一步需要研究奇点附近的情况，这里指的是方程本身的奇点，以别于解作为复变函数时的奇点。

§2. 一次奇点及高阶项的影响

首先研究一次齐次方程组

$$\frac{dw}{dT}=\alpha w+\beta z,\quad \frac{dz}{dT}=\gamma w+\delta z$$

在 $w=z=0$ 点附近的分类。

定义

$$\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & \beta\\ \gamma & \delta-\lambda\end{vmatrix}=0$$

之两根 λ_1，λ_2，则经过非奇异的线性变换，可将上方程组化为

$$\frac{d\xi}{dT}=\lambda_1\xi,\quad \frac{d\eta}{dT}=\lambda_2\eta,\qquad \text{当}\ \lambda_1\neq\lambda_2;$$

而当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，除上形式外，还可以有一种特别形式

$$\frac{d\xi}{dT}=\lambda_1\xi,\quad \frac{d\eta}{dT}=\lambda_1\eta+\lambda_1\xi.$$

前者的通积分为

$$\xi^{1/\lambda_1}\eta^{-1/\lambda_2}=\text{const}\qquad \text{或}\quad \xi\eta^{\varLambda}=\text{const},\quad \varLambda=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

后者的通积分为

$$\eta=\xi(\ln\xi+C).$$

因此，从复域来看，当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，则 $\varLambda=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 之值便可用以作为不同奇点的分类数。而当 $\lambda_1=\lambda_2$ 则分两类，即 $\xi\eta^{-1}=\text{const}$ 和 $\eta=\xi(\ln\xi+C)$ 两类。

进一步，当方程还有非线性项时

$$\frac{dw}{dT}=\alpha w+\beta z+\sum_{l+m\geq 2}p_{lm}w^l z^m,$$

$$\frac{dz}{dT}=\gamma w+\delta z+\sum_{l+m\geq 2}q_{lm}w^l z^m.$$

如果一次项的 $\varLambda$ 的值有 $\mathrm{Im}(\varLambda)\neq 0$，则经过非奇异的变换（但不一定是线性的！）可将高次项的影响取去，亦即也可以得到

$$\xi\eta^{\varLambda}=\text{const}$$

的形式的通积分；因此，按 $\varLambda$ 之值可加以分类。

当 $\mathrm{Im}(\varLambda)=0$，$\mathrm{Re}(\varLambda)<0$ 时，再加上一个条件 $-\varLambda$ 及 $-\frac{1}{\varLambda}$ 都不是正整数，则可以得到上述同样的结果。

以上两种情形，均可按 $\varLambda$ 之值分类。

当 $\mathrm{Im}(\varLambda)=0$，$\mathrm{Re}(\varLambda)<0$，但 $-\varLambda$ 或 $-\frac{1}{\varLambda}$ 为正整数 n 时，则

一般方程组经非奇异的变换可以化为

$$\frac{d\xi}{dT}=\lambda_1\xi+a\eta^n,\quad \frac{d\eta}{dT}=\lambda_2\eta,\qquad (\lambda_1=n\lambda_2).$$

当 $a=0$ 时，亦有 $\xi\eta^{\Lambda}=\text{const}$；而当 $a\neq0$ 则有

$$\xi=\eta^n(\ln\eta+\text{const}).$$

这便是两种类型。

至于 $\text{Im}(\Lambda)=0$，$\text{Re}(\Lambda)>0$ 的情形，则不能只由 Λ 之值加以分类。反例如下：例如 $\Lambda=+1$。

例1. $$\frac{dw}{dT}=-w+zw^2,\qquad \frac{dz}{dT}=z.$$

通解为

$$\frac{1}{zw}+\ln z=\text{const}.$$

例2. $$\frac{dw}{dT}=-w,\quad \frac{dz}{dT}=z.$$

通解为 $$wz=\text{const}.$$

两种情形 Λ 都是 $+1$，但其解析性质全不相同，因此不能归入一类。

古典的复域解析理论对于 $\Lambda>0$ 的情形只停留在反例上，而没有再深入一步去理解这些不同类型的特点以及进一步区分它们，这将留待后来的复域定性理论去研究了。

对于 $\Lambda>0$ 的情形，古典复域解析理论得到下面的结果：

存在两个正则解：

$$w=w_1(z)=\sum_{j>2}c_jz^j$$

和

$$z=z_2(w)=\sum_{j>2}d_jw^j.$$

高次奇点则很少被研究。

§3. 一阶方程的大范围性质

前面谈到的是奇点附近的情形，但是从解析函数的特性来看，函数在小范围的讯息也决定了函数在全局的讯息，至少从黎曼开始，人们已经认识到通向大范围的钥匙在于对小范围的研究。

由于解是解析函数，因此可以研究解的奇点（而不是方程的奇点！）.福赫斯(Fuchs)引入了极重要的分类：解的固定奇点及不固定奇点两种。如果初值不同，解的奇点相同，则称为解的固定奇点；如果解的奇点随初值而变，则称为解的不固定奇点。

例如方程

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2wz}$$

则有通解为

$$w=\sqrt{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)+w_0^2}\text{，当 } z=z_0\text{时，} w=w_0.$$

这里可以看到，对任何的 $z_0\neq 0, w_0, z=0$ 是解的一个本质奇点，因此 $z=0$ 是解的固定奇点。另一方面有

$$w=\sqrt{\ln\left(\frac{z}{z_0e^{-w_0^2}}\right)}=\sqrt{\ln\left(1+\frac{z-z_0e^{-w_0^2}}{z_0e^{-w_0^2}}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{z-z_0e^{-w_0^2}}{z_0e^{-w_0^2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{z-z_0e^{-w_0^2}}{z_0e^{-w_0^2}}\right)^2+\cdots}$$

$$=\sqrt{z-z_0e^{-w_0^2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{z_0e^{-w_0^2}}}+\varphi(z)\right\}.$$

$\varphi(z)$在 $z=z_0e^{-w_0^2}$ 附近为正则，但 w 在 $z=z_0e^{-w_0^2}$ 附近为代数分支点，是一个代数奇点。由此可见，随着初值(w_0, z_0)的不同，这个代数奇点也在移动，因此，这是不固定奇点。

这里有一个重要的普遍性定理：

线性方程组

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{jk}(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1(z) \\ \vdots \\ \beta_n(z) \end{pmatrix}$$

($\alpha_{jk}(z)$，$\beta_l(z)$为 z 之解析函数)的解没有不固定的奇点。

潘烈伟(Painlevé)证明：

当$P\left(\frac{dw}{dz}, w, z\right)$对 w 及$\frac{dw}{dz}$为多项式，对 z 为解析函数，则微分方程$P\left(\frac{dw}{dz}, w, z\right)=0$的解函数没有不固定的本质奇点.

解函数——解是多值的，例如一次奇点的焦点型便是如此。潘烈伟对解函数引入单值与非单值的分类，证明下述结果：如果方程

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\sum\limits_{0 \leqslant m \leqslant M} \alpha_m(z) w^m}{\sum\limits_{0 \leqslant n \leqslant N} \beta_n(z) w^n}$$

的解没有不固定的非单值奇点，则这个方程必为黎卡提方程。

沿着这一方向还有马蒙基斯特(Malmquist)的结果：设$R(w, z)$为 w， z 的有理函数，则方程$\frac{dw}{dz}=R(w, z)$的每一个在大范围单值的解，或者是一个有理函数，或者方程本身是黎卡提方程。

这些工作都突出了黎卡提方程的特殊地位。这类工作的发展逐渐转入微分方程所定义的函数研究。

在具体求解方面，主要是对线性变系数的方程求多项式或幂级数的解.这方面包括许多著名的方程和函数，如贝塞耳(Bessel)方程和函数，勒让德(Legendre)方程和多项式，马秀(Mathieu)方程和函数，超几何级数等等。这些经常在物理学、力学、天文学等方面出现的方程和解已有数学物理方法的教科书。

§4. 自守函数

考虑微分方程

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=1-w^2$$

其通解为 $w=\sin(z+c)$，是 z 的 2π 周期函数．仔细研究便可以看出，对同一个 w 有两个 $\frac{dw}{dz}$ 在 $w=\pm1$ 时为重根，函数 $\sqrt{1-w^2}$ 有代数支点。为了避免多值性，可以用两张 w 平面（包括无限远点），由 $w=-1$ 到 $w=+1$ 割开一个切口，然后交错联上，得到一个黎曼曲面；不难验证，它拓扑等价于一个球面。在这个黎曼曲面上，$\frac{dw}{dz}$ 便可以单值化了。从通解可见，它是 z 的 2π 周期函数；因此，并不需要考虑所有的 z，而只需考虑 z 平面上的一个部分区域，例如

$$0\leqslant \mathrm{Re}(z)<2\pi,$$

则其他部分可用 2π 周期性加以开拓。这个区域可称为基本区域，将边上 $z=iy$ 之点与 $z=2\pi+iy$ 之点重合，无限远处补上两点，得到一个球面。这样，在 mod 2π 的条件下，多值函数 $z=\sin^{-1}w+c$ 也可以单值化了。由此 w 及 z 在上述定义域上都单值化了。在 z 平面上，也可用变换群的概念，即变换

$$z'=z+m2\pi$$

$m=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$，组成一个群，在这个群下，w 之值不变。

现在，将这个基本事实加以推广，首先考虑微分方程

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=(1-w^2)(1-k^2w^2),\qquad 0<k<1,$$

则其通解为椭圆函数

$$w=\mathrm{sn}(z+c;\ k),$$

它是 z 的双周期函数。对于同一个 w，$\frac{dw}{dz}$ 有两值；因此，为了

避免多值性，应当取两张w平面（包括各自的无限远点），从代数分支点 $z=\pm 1$，$w=\pm\frac{1}{k}$用两条联线切开（例如$w=1$与$w=\frac{1}{k}$相联，$w=-1$与$w=-\frac{1}{k}$相联），然后交错接上，得到一个黎曼曲面。不难验证，它是一个环面。另一方面$w=\mathrm{sn}(z+c;k)$是双周期的函数，其两周期分别为

$$4K=4\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

及

$$2iK'=2i\int_1^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k^2t^2-1)}}.$$

亦即

$$\mathrm{sn}(z+m4K+n2iK';\ k)=\mathrm{sn}\ (z;\ k)$$
$$(m\text{及}\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots).$$

由此可见，在z平面上取矩形

$$0\leqslant \mathrm{Re}(z)<4K,\ 0\leqslant \mathrm{Im}(z)<2K'$$

便可形成一个基本区域，将边上$z=iy$与$z=iy+4K$之点重合，将$z=x$与$z=x+i2K'$之点重合，即可形成一个环面。或者说，在z平面上，取变换

$$z'=z+4Km+2K'in\ \ (m,n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

组成一个群，在这个群下，w之值不变。

庞加莱等将这一基本事实加以推广，例如，一般取

$$\frac{dw}{dz}=\prod_{j=1}^{N}(1-k_j^2w^2),\qquad 0<k_1<k_2<\cdots<k_N,$$

则对同一个w，$\frac{dw}{dz}$有双值，因此，应当取两张w平面（包括无限远点），用N条联线（联这$2N$个代数支点$\pm\frac{1}{k_j}$，$j=1,2,\cdots,N$）切开，再交错相联，由此得出一个黎曼曲面，它是一个球上

再加上$(N-1)$个柄，得到一个欧拉——庞加莱示性数为$2(2-N)$的二维有向闭曲面，其中当$N=1$时即球面，$N=2$时即环面。

在z平面上这时不能简单地推广为更多个周期的基本区域，因为平面是二维的，只有单周期和双周期两种可能性。推广的可能性是从单周期变换群和双周期变换群都是下面形式的变换群

$$z'=\frac{\alpha_l z+\beta_l}{\gamma_l z+\delta_l}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ \gamma_l & \delta_l \end{vmatrix}=1 \quad (l=1,\ 2,\ \cdots)$$

的特例，即

$$\alpha_l=\delta_l=1,\ \gamma_l=0,\ \beta_l=m2\pi \quad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

和

$$\beta_l=m4K+n2K'i \quad (m,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的情形。

一般在z平面上也有相应的基本区域，它是由$2N$条边所组成，有$2N$个顶点，将对应边上的点相重合，即得一个二维有向闭曲面，它是由一球面上加上$(N-1)$个柄所构成；$N=1$即球面本身，$N=2$即环面，对于特定的方程(即k_i已给)，则可由

$$z=\int\frac{dw}{\sqrt{\prod_{j=1}^{N}(1-k_j^2 w^2)}}$$

将积分途径取在$\mathrm{Im}(w)=0$上，过分支点$w=\pm\frac{1}{k_j}$时，在$\mathrm{Im}(w)>0$半平面上取一小圆将它绕过，然后将小圆半径趋于零，由此可在z平面上划出相应的具体的基本区域，并决定相应的变换群的具体形式。这样便可以将w及z各限制在一个具有$(N-1)$条柄的有向二维闭曲面上，这时$\frac{dw}{dz}$及z均可单值化，而解函数则有以下性质，

$$u=F(z)=F\left(\frac{\alpha_l z+\beta_l}{\gamma_l z+\delta_l}\right),$$

z即可限制只研究基本区域中的情形。

已给基本区域及相应的变换群，在这种变换下，不变的函数又称福赫斯自守函数，其作法是由克莱茵（Klein 1849-1925）和庞加莱同时解决的，庞加莱利用已给的$\left\{\begin{pmatrix}\alpha_l & \beta_l\\ \gamma_l & \delta_l\end{pmatrix}\right\}$作收敛的无穷级数来定义一个这种自守函数，则其他自守函数便可用这个自守函数来加以进一步的定义。这个办法在研究椭圆函数时已经被应用，而一般地用来完成任意N的情形的工作则是由庞加莱所作，从而结束了这一分支的发展。

由于我们已经提到群的概念，因此不能不提到索夫·李(S. Lie)对常微分方程的贡献。李证明：如果已知一个连续变换群，它将一个常微分方程的解，仍然变成这个常微分方程的解，则由这个已知的变换群可以求出这个常微分方程的积分因子，以及由此求出这个常微分方程的通解；反之，已知这个常微分方程的通解，也可得出一个变换群，它们将这个常微分方程的解仍然变成这个常微分方程的解。

李的这一成就非常基本和完整，但是在实际上，由于变换群不知道，也就不能求出通解。但是，已知通解时，则可用这一方法反求变换群，将已知的结果作一理论的整理和分类。

当然，我们还可以更直接地总结各种已知的结果，得出更简单的概念，这样我们就转到下面的一节。

§5. 复域中的显易解结构

在代数学中，高斯证明了代数方程的基本定理，即在复域中，n次代数方程可以有下面的结构：

$$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\equiv\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)=0$$

这里$a_1,a_2,\cdots,a_n$是任意复数，$z_1,z_2,\cdots,z_n$是这个代数方程的n个复根。这个定理并没有具体地给出z_j的具体表达形式，但这个

关系却表明了代数方程的解析定性结构，并且由此还可得出系数 a_i 和根 z_i 之间的 n 个联立关系，即韦达(Vieta 1540-1603)公式.

常微分方程当然复杂得多，我们来考虑一种特殊类型：

定义 如果微分方程

$$\frac{dw}{dt}=A_n(z)w^n+A_{n-1}(z)w^{n-1}+\cdots+A_0(z) \tag{2.1}$$

具有形如

$$G(z)\prod_{j=1}^{n}(w-w_j(z))^{\lambda_j}=\text{const} \tag{2.2}$$

的通解，则称为具有"第一类显易解结构"。我们称$\{w_1(z),w_2(z),\cdots,w_n(z)\}$为基本解组，$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$为基本解组的"权"，$G(z)$ 为辅助函数。

将通解微分与原式比较，可以得到 $(n+1)$ 个函数 $w_j(z)$ 及 $G(z)$和 n 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 和$(n+1)$个函数 $A_j(z)$之间的类似于代数方程中韦达公式的关系，即由

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{dw_j}{dz}\prod_{j\neq k}'(w-w_k)-\frac{\frac{dG}{dz}}{G}\prod_{j=1}^{n}(w-w_j)}{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\prod_{j\neq k}'(w-w_k)}$$

$$\equiv\sum_{k=0}^{n}A_k(z)w^k$$

知分母应不含 w，故有$(n-1)$个条件：分子有$(n+1)$个条件：总共为 $2n$个条件.要求决定$w_1(z),w_2(z),\cdots,w_n(z),G(z)$共$(n+1)$个函数及 $\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n$ 共$(n-1)$个比值。

下面举出八类属于具有"第一类显易解结构"的方程式：

(Ⅰ)**线性方程**

$$\frac{dw}{dz}=A_1(z)w+A_0(z),$$

则通解可写成

$$G(z)(w-w_1(z))^{\lambda_1}=\text{const},$$

其中 $G(z)=e^{-\int^z A_1(z)dz}$ $w_1(z)=\frac{1}{G(z)}\int^z A_0(z)G(z)dz$, $\lambda_1=1$.

(Ⅱ)黎卡提方程

$$\frac{dw}{dz}=A_2(z)w^2+A_1(z)w+A_0(z),$$

则通解可写成

$$(w-w_1(z))^{\lambda_1}(w-w_2(z))^{\lambda_2}G=\text{const},$$

其中 $w_1(z)$, $w_2(z)$ 为任何两个不同的特解, $\lambda_1+\lambda_2=0$, 例如取 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$, 则 $G(z)=e^{\int^z A_2(z)(w_2(z)-w_1(z))dz}$.

(Ⅲ)伯努利方程

$$\frac{dw}{dz}=A_n(z)w^n+A_1(z)w,$$

有第一类显易解结构的通解:

$$G(z)w^{1-n}(w^{n-1}-w_1^{n-1}(z))=\text{const},$$

即

$$G(z)w^{1-n}(w-w_1(z))(w-e^{i\frac{2\pi}{n-1}}w_1(z))\cdots(w-e^{i\frac{(n-2)}{(n-1)}2\pi}w_1(z))=\text{const}.$$

这里基本解组为

$$\left\{0,\ w_1(z),\ e^{i\frac{2\pi}{n-1}}w_1(z),\ \cdots,\ e^{i\frac{(n-2)}{(n-1)}2\pi}w_1(z)\right\}$$

权为 $\{1-n,\ 1,\ \cdots,\ 1\}$, 而

$$w_1(z)=e^{\int^z A_1(z)dz}\left[(n-1)\int^z A_n(z)e^{(n-1)\int^z A_1(z)dz}dz\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

$$G(z)=(n-1)\int^z A_n(z)e^{(n-1)\int^z A_1(z)dz}dz.$$

(Ⅳ)齐次方程

$$\frac{dw}{dz}=P_m\left(\frac{w}{z}\right),\ P_m(v)\text{为多项式}.$$

如果 $P_m(v)-v=0$ 有单根 $a_1,a_2,\cdots,a_m$, 则通解具有第一类显易

解结构：

$$z^{-1-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j}\prod_{j=1}^{m}(u-a_jz)^{\lambda_j}=\text{const}.$$

（V）**阿贝耳第一类方程**

$$\frac{dw}{dz}=A_3(z)w^3+A_2(z)w^2+A_1(z)w+A_0(z)$$

具有第一类显易解结构的通解的充要条件为

$$(H+\alpha)\Phi=0,$$

其中

$$\Phi\equiv A_0A_3^2+\frac{1}{3}\left(A_3\frac{dA_2}{dz}-A_2\frac{dA_3}{dz}-A_1A_2A_3\right)+\frac{2}{27}A_2^3,$$

$$H=\frac{1}{3\Phi^{5/3}}\left(\Phi\left(3A_3A_1-A_2^2+3\frac{dA_3}{dz}\right)-A_3\frac{d\Phi}{dz}\right),$$

α 为任意常数，但 $\alpha\neq 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$.

当 $\Phi\equiv 0$ 时，可化为伯努利方程。已经验证：

当 $\Phi\not\equiv 0$，则 $H+\alpha\equiv 0$，故 $H=-\alpha\neq -3\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}$. 代数方程

$$v^3+Hv+1=\prod_{j=1}^{3}(v-v_j)$$

有三个单根 v_1，v_2，v_3，则通解为

$$e^{-\int^z\frac{\Phi^{2/3}}{A_3}dz}\prod_{j=1}^{3}(u-v_j)^{\lambda_j}=\text{const},$$

$$\lambda_1=\frac{v_3-v_2}{\Delta},\qquad \lambda_2=\frac{v_1-v_3}{\Delta},\qquad \lambda_3=\frac{v_2-v_1}{\Delta}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} v_2v_3 & v_3v_1 & v_1v_2 \\ v_2+v_3 & v_3+v_1 & v_1+v_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

上述方程类型还可扩充为

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\sum_{k=0}^{m}A_k(z)w^k}{\sum_{k=0}^{n}B_k(z)w^k},$$

则下述类型也具有第一类显易解结构的通解。

（Ⅵ）雅可比方程

$$\frac{dw}{dz}=\frac{w(Aw+Bz+C)-(Dw+Ez+F)}{z(Aw+Bz+C)-(Gw+Hz+K)},$$

并且特征方程

$$\begin{vmatrix} D-\mu & E & F \\ G & H-\mu & K \\ A & B & C-\mu \end{vmatrix}=0$$

的三根 μ_1，μ_2，μ_3 互不相等，则其通解为第一类显易解结构：

$$(a_{11}w+a_{12}z+a_{13})^{\mu_2-\mu_3}(a_{21}w+a_{22}z+a_{23})^{\mu_3-\mu_1}$$
$$\cdot(a_{31}w+a_{32}z+a_{33})^{\mu_1-\mu_2}=\text{const}.$$

其中

$$G(z)=1,\quad w_1(z)=-\frac{a_{12}z+a_{13}}{a_{11}},$$

$$w_2(z)=-\frac{a_{22}z+a_{23}}{a_{21}},\quad w_3(z)=-\frac{a_{32}z+a_{33}}{a_{31}},$$

以及权

$$\lambda_1=\mu_2-\mu_3,\ \lambda_2=\mu_3-\mu_1,\ \lambda_3=\mu_1-\mu_2.$$

（Ⅶ）阿贝耳第二类方程

$$\frac{dw}{dz}=\frac{A_2(z)w^2+A_1(z)w+A_0(z)}{w+B_0(z)}$$

具有通解为第一类显易解结构：

$$(w-w_1(z))^{\lambda_1}(w-w_2(z))^{\lambda_2}G=\text{const}.$$

($\lambda_1+\lambda_2$ 可以化为 1)的充要条件为，存在常数 λ_1 及 $\lambda_2=1-\lambda_1$，使方程有一特解

$$w_1(z)=\frac{B_0\left[-A_2B_0+A_1\lambda_1+\lambda_2\dfrac{dB_0}{dz}\right]-(\lambda_1-\lambda_2)A_0}{2\lambda_2A_2B_0-\lambda_2\dfrac{dB_0}{dz}-\lambda_2A_1}.$$

在此时更有

$$w_2(z)=-\frac{\lambda_2w_1+B_0}{\lambda_1},\quad G(z)=e^{-\int^z A_1 dz}.$$

(Ⅷ)齐次方程

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P_m\left(\dfrac{w}{z}\right)}{Q_n\left(\dfrac{w}{z}\right)},$$

P_m，Q_n 为 m 次及 n 次多项式，$m\geqslant n$。

如果代数方程

$$P_m(a)-aQ_n(a)=0$$

只有单根 a_j，则这种齐次方程的通解有第一类显易解结构

$$\left\{\prod_{j=1}^{m}(w-a_jz)^{\lambda_j}\right\}z^{-1-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j}=\text{const},\qquad (n<m)$$

或

$$\prod_{j=1}^{n+1}(w-a_jz)^{\lambda_j}=\text{const}.\qquad (n=m)$$

对应于上述各类中出现重根的情形，则还有“第二类显易解结构”。

总之，在卡姆克手册中积累的大量材料都可以归结为“显易解结构”。这样，人们便可以将大量的特别的方程的求解纳入了同一类型，许多充要条件也可有规律地导出，从 $n=3$ 以上一般都要再加条件，故一般求出显式解析解的可能性极小。

不仅如此，甚至 $n=2$ 时，虽然已知黎卡提方程都具有第一类显易解结构的通解，但是在1841年，刘维尔 (Liouville 1809-1882)证明黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx}+y^2=1+\frac{\nu(\nu+1)}{x^2}$$

只有当ν为正整数时才有“初等”解，也就是前面已经提到的丹尼尔·伯努利已经得到的结果。

刘维尔这一结果对于常微分方程的发展具有很大的影响，它指出寻找“初等”解的前途不大，因为对于求解最简单的非线性方程，如黎卡提方程，已出现这种本质的困难，因此，必须找寻其它的发展道路。

在此，我们必须提到与刘维尔的工作有关的斯图谟的工作．斯图谟在研究热传导时引出了齐次二阶微分方程，他证明在一定条件下，任何两个解的零点互相分隔。值得指出的是，斯图谟的工作开始了定性研究的萌芽；不难理解，正是斯图谟在实系数代数方程的实根的数目方面应用了定性思想，才得出现在通称的斯图谟法则。

刘维尔所指出的困难和斯图谟所提示的思想在庞加莱的工作中得到重大发展，使常微分方程的研究发展到一个新的阶段．这将在下一章中阐述。

在此，我们顺便提一下斯图谟和刘维尔开创的常微分方程边值问题的研究。他们考虑了方程

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+P(x)\frac{dy(x)}{dx}+\lambda y(x)=0$$

在已给定边界条件下具有非零解$y(x)$时参数λ应为何种值．这些解和值的关系问题，即特征函数与特征值的问题，在近代物理与技术中有很广泛的应用，并且已发展成为常微分方程的一个重大分支。

我们不能详细涉及所有这些方面，而将转到常微分方程实域定性理论的主线上去。

第三章 实域定性理论

§1. 庞加莱的思想

前面我们已经指出过，在研究“二体问题”时，牛顿很幸运的是，先有了解答(行星是沿椭圆轨道运动)，再得出引力公式，再建立引力作用下行星运动的微分方程. 牛顿的后继者们面临的则是已经有了描述运动的微分方程，要求出它们的解，首先遇到的是“三体问题”，日、地、月的相互吸引下它们的运动规律. 这种问题在当时具有很大的现实价值和理论意义，因为航海时潮汐受到月球和太阳的相对位置的影响极大. 不幸的是“三体问题”的“初等”积分除了能量守恒、动量守恒及角动量守恒等十个关系外，到今天一个也没有得到，但是天文历算迫使人们要解决这类问题. 另外若干理论问题，例如太阳系的结构在万有引力作用下是否稳定，也是当时十分吸引科学家注意的问题；太阳系是“多体问题”，情况要更为复杂万分.

天体力学是庞加莱十分注意的问题，特别是三体问题，庞加莱在总结自己的工作时，写道：

“举三体问题为例，能否要求一个天体总停留在宇宙的某一区域，或者跑到无限远去，或者两个天体的距离不断增加，或不断减少，亦或在某些限度之内？当我们能定性地作出三体的轨线时，我们可以举出无数的这类问题，可由此解决. 如果考虑多体问

题，则研究行星的不变量的问题，实际上是一个定性几何的问题，因为要证明长轴不是一个永年变量，只要证明它是在一定的极限之内振动即可."

为了寻求这种外界的控制线，促使庞加莱引进了"极限环"的概念，这个概念成了平面定性理论中最核心的问题之一.

另一方面，在前一章所述及的历史发展的背景下，庞加莱关于自己的工作的思想，在他的自我总结中写道：

"自从微积分的原理建立以后，分析工作者遇到三个问题：

代数方程的求解；

代数微分的积分；

微分方程的积分.

这三个问题的历史是相同的，为了要简单地解出这些问题，经过了长时期的和无效的努力，数学家终于放弃了这种企图，但是从失败中却得到了胜利的报偿.

长时期中，人们希望所有的代数方程都能用开根来求解，但这种想法已经被放弃了. 而今天人们对代数函数的了解，正如对它要想用来解决问题的根式一样. 同样地对于代数微分的积分，人们长时期想用对数和三角函数来解决，而现在则借新超越函数之助实现了.

对微分方程也极为类似，由积分可解出的微分方程的类型是极为有限的，如果人们不能决定直接由这些方程本身来研究积分的性质时，整个这一分析领域便将成为一个广阔的未知地带，它对于数学家将始终是一个禁区."

为了正面打开这一禁区，庞加莱继续写道：

"一个函数的完全的研究包含两部份：

1° 定性部分或者函数所定义的曲线的几何研究；

2° 定量部分或者函数之值的数字计算.

因此，例如要研究一个代数方程，人们首先借斯图谟定理之助求

出实根的数目，这就是定性部分；然后人们计算这些根的数值，这便是这个方程的定量研究．同样，为了要研究一条代数曲线，人们首先“作出”这条曲线，如专门数学书中所说的那样，也即是这个曲线有哪些闭分支，哪些无限分支等等．在曲线的这些研究之后，人们就可以准确地决定它上面的若干点．

要研究一个函数的整体的理论，自然首先要研究定性部分．因此，现在面临的占首要位置的问题如下：

作出由微分方程所定义的曲线族．”

在正确地提出问题之后，庞加莱进一步指出了定性和定量研究的关系．他写道：“当这种定性的研究完成之后，对函数的数值计算将有非常大的用处，它使我们非常容易了解在一定区域中用来表示所求函数的那些收敛级数，因为主要的困难是由一个区域中用一种级数表示的情形过渡到另一个区域中用另一个不同的级数表示的情形提供一个指导．”

对于定性理论本身，庞加莱指出：“此外，定性理论的研究本身也具有第一等的兴趣，分析及力学的各种重要问题可以化归它来解决．”接着庞加莱便写了前面我们已引过的关于三体问题的那一段讲话．

为了更形象地突出庞加莱的工作的历史继承性和发展性，我们将代数方程的研究与常微分方程的研究作一对比，兹列表如下：

代 数 方 程	常 微 分 方 程
一、二、三、四次方程的代数解	线性方程、伯努利方程的初等解
高斯证明复域中解的存在性	柯西证明在复域中解的存在性
秦九韶、霍纳数值求解法	欧拉、龙格—库塔数值求解法
阿贝耳证明五次方程一般没有代数解	刘维尔证明黎卡提方程一般没有初等解
伽罗瓦群的概念，将根的全体作为一个整体来研究	李群的概念，将解的全体作为一个整体来研究
斯图谟关于实根个数的定性研究	庞加莱关于实积分曲线的定性研究

另外，从柯西的工作到庞加莱的工作，这里也有下面的明显的转变：

从复域的研究转回实域的研究；

从解析的研究转到定性的研究；

从定解的问题转到解的全体问题；

从函数作为对象转到曲线作为对象；

从分析的方法转到几何的方法；

从用等式（级数展开）转到用不等式(无切关系)；

从局部的研究（级数收敛区）转到全局的研究（整体拓扑性质）.

这一转变极其根本和深刻，因而成果也极丰富. 从1881年到1886年，庞加莱以"微分方程所定义的积分曲线"为题写了四篇文章. 在这里微分方程所定义的积分曲线既是研究的对象，通过对它的几何性质的理解又是理解微分方程的解的性质的工具.

下面是主要的具体内容及其后的发展简况.

§2. 一次奇点及高阶项的影响

首先是局部的情形. 在一个正常点的附近，其拓扑结构一般等价于一系列的平行线，拓扑上没有什么特殊性. 因此，首先要研究的是奇点，即方程组右方同时为零之点.

对于一次奇点，对 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$，方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\alpha x+\beta y+\sum\limits_{j+k>1} a_{jk}x^j y^k \\ \dfrac{dy}{dt}=\gamma x+\delta y+\sum\limits_{j+k>1} b_{jk}x^j y^k \end{cases}$$

的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + p\lambda + q = 0 ,$$

则奇点(0，0)附近的几何拓扑性质分为四种类型

$$\begin{array}{lll} q<0 & & \text{鞍点} \\ q>0 \begin{cases} p\neq 0 \begin{cases} p^2-4q>0 \\ p^2-4q<0 \end{cases} \\ p=0 \end{cases} & & \begin{array}{r} \text{结点} \\ \text{焦点} \\ \text{中心或焦点} \end{array} \end{array}$$

这样，不必求解微分方程，只从 p，q 之值便可以判断解族的定性行为.

进一步对 $q>0$，$p=0$ 之情形，庞加莱给出了中心和焦点的具体判定方法. 从理论上讲，方法是完整的，但由于计算的复杂性，甚至对于方程右方是不高于 2 次的多项式，包括全部参数的判定公式也只有到了 1980 年利用计算机才将它们解决了(见附录 I).

对 $q=0$ 的情形，这是高阶奇点，有李雅普诺夫(Ляпунов)、班狄克生 (Bendixson) 等人的大量工作. 但工作远未完整，甚至问题的提法都还需进一步研究. 特别值得提出的是李雅普诺夫的工作已经发展成一个独立的富有成果的新分支——运动稳定性的理论.

在研究了奇点在附近邻域中积分曲线的拓扑结构之后，庞加莱转向奇点在流形上的大范围分布的规律性的研究.

如果不看无限远处的情形，则许多方程，例如

$$\frac{dx}{dt}=1, \qquad \frac{dy}{dt}=1,$$

在有限处便没有实奇点. 但是，如果将平面由球心投影到切于这个平面的球面上，则无限远处便投影到球的赤道上，这时赤道上便出现两个结点. 抓住这种特例，庞加莱进一步证明：在这种全球考虑的条件下，方程组

$$\frac{dx}{dt}=X_m(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Y_n(x, y)$$

一定有实奇点.进一步他证明了对于一般的实方程组:$\frac{dx}{dt}=X(x,$

$y)$, $\frac{dy}{dt}=Y(x,x)$,在全球一定有实奇点. 进一步引入孤立奇点P的指数$\mathrm{I}(P)$的概念，即当点 (x, y) 以反时钟方向绕P点一周时，向量$(X(x, y)),Y(x, y))$绕过反时钟方向(或顺时钟方向作负值)的周数。由此知，对于

$$q>0, \quad \mathrm{I}(P)=+1; \qquad q<0, \quad \mathrm{I}(P)=-1.$$

进一步可以得到，对于球面，便有所有奇点的指数和

$$\sum_i \mathrm{I}(P_i)=2.$$

进一步则飞跃为，对于一般的有向二维闭曲面 M^2

$$\sum_i \mathrm{I}(P_i)=\chi(M^2)=2(1-n),$$

这里 $\chi(M^2)$ 是这个曲面的欧拉——庞加莱示性数，n 是这个曲面从球面再加上柄的数目，对于球 $n=0$，对于环面 $n=1$.

再进一步，对任意高维空间中的有向流形M及其上定义的连续向量场，则M上的奇点的指数和

$$\sum_i \mathrm{I}(P_i)=\chi(M).$$

这些已经进入新的学科——组合拓扑学的领域了. 庞加莱正是这样同时开创了常微分方程实域定性理论和组合拓扑学，它们是一对双生的学科. 这种从实际问题抽象出的理论，也就能反回去指导实际.

现在，我们要转入实域定性理论中一个核心概念——极限环.

§3. 极 限 环

在实域定性理论中，庞加莱的一大贡献是："极限环"概念的引入．极限环是孤立的周期解，它的附近的积分曲线以它为极限位置．在代数的曲线族 $F_n(x, y)=\text{const}$ 中闭曲线是成串的，不存在这种孤立极限闭曲线的情形，只有微分方程中才出现．最简单的例子是：

$$\frac{dx}{dt}=y+x(x^2+y^2-1), \quad \frac{dy}{dt}=-x+y(x^2+y^2-1).$$

则

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dt}=2(x^2+y^2)(x^2+y^2-1).$$

故知闭曲线C：$x^2+y^2-1=0$ 是一种闭解，并且它内部及外部之曲线C'当 $t\to-\infty$ 时，以它为极限集合．但是，反过来它却不以其他积分曲线作为极限集合，这种孤立极限性质是它的一个拓扑特点，用记号可以写成：

$$\overline{C'} \supset C \quad , \quad \overline{C} \not\supset C'.$$

庞加莱清楚地预见到极限环在实域平面定性理论中将"扮演一个主要角色"；他以天体力学中的太阳系的稳定性为背景，设想，在其外部若能找到一个极限环，则"如果一个动点不在极限环附近，则它或总在内部，或总在外部"．这样极限环的存在，保证了这个运动系统在演化中的某种"稳定性"，即不会散开到无限远处．当然，后来在物理、力学、工程等中出现的极限环更有它本身的重要性，而不只是作为某种界限，这在后面将要再论及．

在研究极限环时，庞加莱引进了一个重要工具"无切环"的概念，即一条闭曲线，在它上面，微分方程所定义的向量场不与它相切；或者用"广义无切"的概念，即对这条约当曲线微分方程所定义的积分曲线，或者只从它外部穿入它内部，或者只

从它内部穿出它外部．“无切环”和“无切弧”的概念是庞加莱对实域定性理论引入的主要工具，这是将等式的研究改为用不等式的研究，由分析工具改为几何工具的表现．作为庞加莱职位的接任者，阿达马(Hadamard)总结了庞加莱的工作，他称这种作法为“非积分”(Unintegral)，以便与微分方程的“积分”相对比；由于微分方程解的唯一性，他指出：“积分曲线不能穿过无切环多于一次，如果一质点沿着轨线穿出一条无切环线，它就不再能穿入它．……用天文学的话说，这个质点的轨线是不稳定的．”

庞加莱明确地指出，极限环一般不是代数的，而是超越的．但他却能将代数方程（以及一般超越方程）求根的概念和许多性质创造性地用于常微分方程极限环的存在性和唯一性等方面．下面是庞加莱，以及其后的班狄克生的结果，列表对比如下：

代数方程的根	常微分方程的极限环
设有两点 a 及 b，$a<b$，并设在 a 及 b 点，函数 $f(x)$ 之值反号： $f(a)f(b)<0$， 并设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 之间连续，则在 $a<x<b$ 中 $f(x)$ 必有奇数个根，至少一个根．	设有两条无切环 C_1 及 C_2，C_2 包含 C_1 在内部，并设在 C_1 及 C_2 上，方程的向量场穿入和穿出的性质相反，并设在 C_1 及 C_2 所围成的环形区域中，微分方程没有奇点，则在 C_1 及 C_2 之间，微分方程必有奇数条极限环，至少一条极限环．
设有两点，$x=a$，$x=b$，$a<b$，在其上函数 $f(x)$ 之值同号： $f(a)f(b)>0$，	设有两条成串的无切环 C_1 及 C_2，C_1 包含 C_2，在它们上面积分曲线穿入及穿出的性质相同，并设在 C_1 及 C_2 所围成

并设函数$f(x)$在$[a, b]$之间连续，则在$a<x<b$中$f(x)$必有偶数个（包括零个，即不存在）根.	的环形区域中，微分方程没有奇点，则在C_1及C_2之间，微分方程必有偶数条（包括零条，即不存在）极限环.
设有两点$x=a$, $x=b$, $a<b$, 在$[a, b]$上 $\frac{df(x)}{dx}$定号，并且不为∞，则在$[a, b]$上，$f(x)$的根如存在，必为唯一的.	设有两条成串的无切环C_1及C_2，C_1包含C_2，在C_1及C_2所围成的环形区域上，由方程右方的函数所形成某个泛函之微分为定号，并不为无穷，则在C_1及C_2所围成的环形区域中，微分方程的极限环如存在，必为唯一的.

这种对比的表我们以后还将继续列出许多组. 庞加莱当时作为例子，研究了类型如

$$\frac{dx}{dt}=-y+xF(x,y), \qquad \frac{dy}{dx}=x+yF(x, y)$$

的一种特例，其中$F(x, y)$为x, y之多项式，$F(x, y)=0$为一个圆或两个圆成串的方程. 庞加莱对此种特例研究了存在性、不存在性、唯一性、唯二性等等. 这些研究的普遍结果由西北大学张棣所获得.

极限环在工程技术方面得到了广泛的应用. 这里首先是与无线电技术相联系的电磁振荡的非线性线路的过渡过程及最后的稳定振荡状态；其代表性的方程为以工程师范德坡(van der Pol)之名命名的范德坡方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt}+x=0, \qquad \varepsilon>0.$$

由于线路元件的非线性特性，出现了x^2项这一非线性项，工程师正是利用了这一非线性特性来完成其收发无线电波的信息的设计任务．苏联的安德诺洛夫（Андронов）发现了范德坡方程的唯一的全局稳定的振荡过程正好是庞加莱所提出的极限环；这一重要发现将非线性线路的研究工作与常微分方程实域定性理论的研究工作联系在一起，给常微分方程实域定性理论的研究工作以极大的推动．常微分方程实域定性理论的发展又反过来为非线性线路的非线性振荡过程提供了有力的数学工具，这正是生产的需要决定科学的发生和发展，而科学的发展又为生产开辟道路的又一明显例证．

继非线性无线电技术之后，自动调节理论也广泛涉及到非线性的微分方程的定性研究，其中也出现了极限环的广泛应用．例如最简单的不连续自动控制系统

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2D\frac{dx}{dt}+x=-\operatorname{sign}\left(x+k\frac{dx}{dt}\right),\quad k<0,\ 0<D<1,$$

这个系统也出现唯一的全局稳定的极限环．

继自动控制理论之后，生态平衡、生物化学中的稳定振荡等等也广泛地涉及到实域中的非线性常微分方程的定性研究．一个典型的例子是生物化学中的布鲁塞尔振子(Brusselator)方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A-(1+B)x+x^2y,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=Bx-x^2y.\end{cases}$$

$$x>0,\ y>0,\ A>0,\ B>0.$$

当$B>1+A^2$时存在唯一全局稳定的极限环；当$B\leqslant 1+A^2$时，则不存在极限环．

有关这些领域中的常微分方程实域定性理论的研究正在大发展．这些都是生产的需要决定科学的发生和发展的成批例证．

但是，极限环的研究还来自另一方面的推动，这里我指的是，从数学理论发展的需要。1900年，在巴黎国际数学会上，希尔伯特（Hilbert 1862—1943）作了“数学问题”的著名报告，在其中提出了23个问题。他的第16问题的后半部，即是关于极限环的问题。其内容如下：对于实域微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=X_n(x,\ y),\qquad \frac{dy}{dt}=Y_n(x,y).\qquad (E_n)$$

$X_n(x,\ y)$及$Y_n(x,\ y)$为不高于n次的多项式，问这类系统最多可以有多少个极限环；这个最大数目$N(n)$的决定，以及当系统(E_n)的极限环数达到这个最大数目时，它们的相对位置如何？

1974年美国数学会为希尔伯特问题开了专门的讨论会，出版了“希尔伯特问题所引起的数学发展”两卷集，对于23个问题中的22个均有专章论述。只有第16问题，除了重抄一下题目之外，一字未提。

这方面的发展简述如下：

庞加莱开始的庞加莱型极限环，已如前述，最简单的是(E_3)类型；范德坡方程也是(E_3)类型。

系统的研究应当从(E_2)开始，这方面文献极多，但主要结果如下：

1934年福罗默尔(Frömmer)研究一个特殊(E_2)，证明

$$N(2)\geqslant 1.$$

但方程系数不具体，只证明可能性。

1957年秦元勋用下述类型

$$\frac{dx}{dt}=y(ax+by+c)+(x^2+y^2-1),$$

$$\frac{dy}{dt}=-x(ax+by+c),$$

在条件$b^2<a^2+b^2<c^2$下存在唯一的极限环$x^2+y^2-1=0$，具体

实现了(E_2)极限环的存在性.

1952 年鲍丁(Баутин)研究一类特殊(E_2)，证明

$$N(2)\geqslant 3.$$

但方程系数不具体，只证明可能性.

1958 年秦元勋、蒲富全发展一套方法，用以具体实现这一存在性(参考附录Ⅱ).

在相对位置方面，1957 年董金柱证明:

对于(E_2)如果两极限环成串，则同向旋转，如果不成串，则反向旋转.

叶彦谦也得到这一结果.

在平面上只有顺时针和反时针两种旋转方向，因此，最多存在两串极限环，由此得到

$$N(2)=\alpha+\beta,$$

其中α及β为两串极限环的数目.

1978 年史松龄给出具体系数的例子表明

$$N(2)\geqslant 4,\ \alpha\geqslant 3,\ \beta\geqslant 1.$$

陈兰荪、王明淑得到类似结论，但方程系数不具体.

1979 年秦元勋、史松龄、蔡燧林证明:

如果(E_2)具有一个三阶细焦点以及一个无限远奇点，则绕三阶细焦点之极限环数

$$\alpha=\text{偶数}\geqslant 0,$$

另一串有极限环数

$$\beta=\text{奇数}\geqslant 1.$$

故经过微扰，从三阶细焦点跳出三个环，则有

$$\alpha=\text{奇数}\geqslant 3,\qquad \beta=\text{奇数}\geqslant 1.$$

故这类结构一般有

$$N=\text{偶数}\geqslant 4.$$

1982 年秦元勋、索光俭、杜星福减弱上面的“一个无限远

奇点”的条件，在一定条件下，仍得 $N\geqslant 4$ 的结论，并由华苏给以具体系数例子加以实现.

关于 (E_2) 最大数目下界的结果，在实域中已达到的结论即到此了.

关于 (E_2) 最大数目的上界则在实域中未得到，这一任务将由复域定性理论的发展去完成；这将在本书第四篇去解决.

在第四篇，我们将证明：

定理 $N(2)=4$，并具 $\alpha=3$，$\beta=1$ 的结构即 $(1)+(1\supset 1\supset 1)$ 之结构.

§4. 一般二维有向闭曲面上的微分方程

前面已经提到，一般有向二维闭曲面 M^2 是由球面加上 n 个柄所形成，它上面的微分方程(或向量场)的奇点之和为

$$\sum_i \mathrm{I}(P_i)=\chi(M^2)=2(1-n).$$

当 $n=0$ 时，即为球面，可以看成平面再加上无限远奇点所形成，其研究已如前述.

$\sum_i \mathrm{I}(P_i)=0$ 的充要条件是 $n=1$，即环面. 因此，微分方程组如不存在奇点(包括无限远奇点)则只能在环面上.

环面上的运动也是常见的运动，例如以太阳为座标原点，以地球运动的黄道平面为座标平面，则月球运动的白道平面与黄道平面有一个约 5° 的夹角；因此，从太阳看月球运动的轨迹在一个环面上.

在环面上，可以作出没有奇点的微分方程组，最简单的例子是方程组：

$$\frac{d\theta}{dt}=\mu,\qquad \frac{d\varphi}{dt}=1,$$

μ 为常数，θ 及 $\varphi\ (\mathrm{mod}\,2\pi)$ 是普通的角度，这时

$$1+\mu^2\neq 0,$$

故没有奇点.

这时通解为

$$\theta=\mu\varphi+\text{const},$$

依 μ 之性质而有本质的不同. 当 μ 为有理数时，例如 $\mu=\frac{p}{q}$; p, q 为整数，则当 φ 转 $2\pi q$ 时，θ 转 $2\pi p$，故所有的解都是周期解，所有积分曲线都是闭曲线，类似于中心的情形，故也称“中心型”.

当 μ 为无理数时，当 φ 转任何 q 圈，即增加 $2\pi q$ 时，θ 增加 $2\pi\mu q$，不是 2π 的整倍数，故所有解都不是周期的，所有积分曲线都不是闭的，不仅如此，任一条积分曲线在全环面上是处处稠密的，即在环面上任何点的任何邻域内任何一条积分曲线都要经过. 按统计物理的概念称之为“各态历经型”.

这种由于 μ 的有理性与无理性而产生的定性本质区别，后面我们将要用到.

关于环面上没有奇点的微分方程的基本性质可以总结如下:

1° 对任何一族积分曲线，$\theta=\theta(\varphi, c)$, $\lim\limits_{\varphi\to\infty}\frac{\theta}{\varphi}=\mu$ 存在，并与 c 无关.

μ 称为“旋转数”.

2° 当 μ 为有理数时，一定存在周期解，即闭积分曲线. 这里又分两类，即“中心型”和“极限环型”. 前者之例已给，后者例如:

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{dt}=1+\dfrac{1}{2}\cos\theta,\\[2ex]\dfrac{d\varphi}{dt}=1+\dfrac{1}{4}\cos\theta+\dfrac{1}{4}\cos\varphi,\end{cases}$$

则有一条闭解 $\theta=\varphi$，其他解均不闭，并以它为极限，这条闭轨是半稳定的极限环。

3° 当 μ 为无理数时，又分两类，即“各态历经型”和“奇异型”.前者之例已给，后者每一条解均为无一处稠密的，其例子可以造出，但对于方程右方是正则函数时，邓儒阿（Denjoy）已证明不存在这种“奇异型”.

关于其他二维有向闭曲面上的微分方程，则由于 $\chi(M^2)\neq 0$，故一定存在奇点．具体方程的研究还不多，主要的工作是抽象动力系统的类型，已出方程讨论之外.

§5. 空间定性理论

三维空间中的一次奇点，有类似于平面的研究．设方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+X_2(x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+Y_2(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt}=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+Z_2(x,y,z). \end{cases}$$

则由特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

知有三根 λ_1，λ_2，λ_3，其中至少有一实根，如有复根则必成对；故只有两大类，即三实根，和一实根、两共轭复根．情况如下：

三实根 $\begin{cases} \text{三根同号，结点型.} \\ \text{两根同号，一根反号，鞍点型.} \end{cases}$

一实根(λ_1)
两复根(λ_2，λ_3) $\begin{cases} \mathrm{Re}(\lambda_1)\mathrm{Re}(\lambda_2)>0\text{，结点－焦点型.} \\ \mathrm{Re}(\lambda_1)\mathrm{Re}(\lambda_2)<0\text{，鞍点－焦点型.} \\ \mathrm{Re}(\lambda_2)=0\text{，中心－焦点型.} \end{cases}$

在这五类中，前四类高次项不影响拓扑结构，第五类则是临界情形，高次项对它们有影响.

更高维的空间也可作类似研究与分类.

三维空间中的周期解是一个困难的问题. 在存在性方面，如果存在一个环面，过曲面的积分曲线均由上穿出（或穿入），在环面内积分曲线沿环旋转，则一定存在周期解.

比这个问题更简单一些的是周期解附近的积分曲线的定性行为. 这时化为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=X(x,y,t), \\ \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y,t), \end{cases}$$

具有以T为周期（例如2π）的方程组的原点 $x=y=0$ 附近的问题.

由 $t=0$，$x=x_0$，$y=y_0$ 出发，到 $t=2\pi$，$x=x_1$，$y=y_1$，则有关系

$$x_1=\alpha x_0+\beta y_0+R(x_0,\ y_0),$$
$$y_1=\gamma x_0+\delta y_0+S(x_0,\ y_0),$$

R，S是$(x_0,\ y_0)$的高阶项. 同样可作示性方程

$$\begin{vmatrix} \alpha-e^{2\Pi\lambda} & \beta \\ \gamma & \delta-e^{2\Pi\lambda} \end{vmatrix}=0.$$

这里有两根λ_1，λ_2，积分曲线在(0，0)附近的定性行为，大体上相应于

$$\varphi_1(t)e^{\lambda_1 t}+\varphi_2(t)e^{\lambda_1 t}$$

函数的性质，其中$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$为t之2π周期函数. 分类不在此赘述.

三维空间或更高维空间的研究中，对于具体方程的研究越来越困难，人们逐步地脱离具体的方程式，而转入一般的动力系统，

以致更一般的抽象动力系统的研究，这里已经越来越成为拓扑学研究的对象了.

关于实域定性理论，经过100年的发展，内容极其丰富，有兴趣的读者可参考作者所写的《微分方程所定义的积分曲线》一书，或其它教科书.

下面，我们要转入常微分方程中的一个刚刚开始发展的领域——复域定性理论方面的探索.

第二篇

复域定性理论中的奇点理论

第一章　一次奇点

§1. 分　　类

本章研究方程组

$$\frac{dw}{dT}=\alpha w+\beta z, \qquad \frac{dz}{dT}=\gamma w+\delta z, \tag{1.1}$$

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0. \tag{1.2}$$

这个方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+p\lambda+q=0, \tag{1.3}$$

有两特征根 λ_1 及 λ_2．定义

$$\Lambda=-\lambda_1/\lambda_2 \tag{1.4}$$

由条件(1.2)，$\lambda_1\neq 0$，$\lambda_2\neq 0$，故$\Lambda\neq 0$，∞.

对于(1.1)的奇点(0, 0)，按Λ分为三类：

(i)　$\mathrm{Im}(\Lambda)\neq 0$，称为“焦点型”；

(ii)　$\mathrm{Im}(\Lambda)=0$，$\mathrm{Re}(\Lambda)<0$，称为“结点型”；

(iii)　$\mathrm{Im}(\Lambda)=0$，$\mathrm{Re}(\Lambda)>0$，称为“中心鞍点型”.

下面分别研究这三种类型的拓扑结构.

§2. 焦 点 型

先对"孤立极限积分曲面"下一定义.

设$\mathscr{F}$为一积分曲面. 如果$\mathscr{F}$附近的其他积分曲面$\mathscr{F}_1$有关系$\overline{\mathscr{F}}_1\supset\mathscr{F}$, $\overline{\mathscr{F}}\not\supset\mathscr{F}_1$, 则称$\mathscr{F}$为一张"孤立极限积分曲面". $(\bar{\ })$表示闭包.

定理 1.1 设方程组(1.1)为焦点型, 则所有的积分曲面均过奇点 $w=z=0$, 有且只有两张孤立极限积分曲面.

证明 由于 $\mathrm{Im}(\Lambda)\neq 0$, 故$\Lambda\neq -1$, $\lambda_1\neq\lambda_2$. 因此, 经过非奇异的线性变换, 可将(1.1)化为

$$\frac{d\tilde{w}}{dT}=\lambda_1\tilde{w}, \qquad \frac{d\tilde{z}}{dT}=\lambda_2\tilde{z}. \tag{1.5}$$

得通积分

$$\tilde{w}(\tilde{z})^{\Lambda}=\text{const}. \tag{1.6}$$

记

$$\tilde{w}=Re^{i\psi}, \quad \tilde{z}=\rho e^{i\phi}, \quad \Lambda=a+bi. \tag{1.7}$$

其中 R, ψ, ρ, ϕ, a, b, 均为实数, 并且

$$b\neq 0. \tag{1.8}$$

则(1.6)化为

$$Re^{i\psi}(\rho e^{i\phi})^{a+bi}=C. \tag{1.9}$$

双方取绝对值后可有

$$R=|C|e^{b\phi-a\ln\rho}.$$

对于任何C, 取 $\phi=\dfrac{1}{b}\left[a\ln\rho-\dfrac{1}{\rho}\right]$, 并将 $\rho\to 0^+$, 则 $R\to 0$. 亦即积分曲面均过奇点 $\tilde{w}=\tilde{z}=0$.

其次要证明 $\tilde{w}=0$ 是一张孤立极限积分曲面.

在$\mathscr{F}$: $\tilde{w}=0$ 上任取一点 P_0: $\tilde{w}=0$, $\tilde{z}=\tilde{z}_0=\rho_0e^{i\phi_0}\neq 0$. 任

取一积分曲面 $\mathscr{F}_1$：$\tilde{w}(\tilde{z})^{\Lambda}=c_1\neq 0$. 在 $\mathscr{F}_1$ 上可取一系列的点：$\{(\tilde{w}^{(n)},\ \tilde{z}^{(n)})\}$，其中

$$\tilde{z}^{(n)}=z_0e^{i2n\pi},\qquad \tilde{w}^{(n)}=c_1(\tilde{z}^{(n)})^{-\Lambda},$$

则有

$$\tilde{z}^{(n)}=z_0,\qquad \tilde{w}^{(n)}=c_1(\rho_0e^{i\ \phi_0+2n\pi\ })^{-(a+bi)},$$

故
$$|\tilde{w}^{(n)}|=|c_1\rho_0^{-a}e^{b\psi_0}|e^{2n\pi b}\longrightarrow 0,$$
当 n 取整数，使 $nb\longrightarrow-\infty$.

由此即得
$$\bar{\mathscr{F}}_1\supset\mathscr{F}.$$
另一方面 $\mathscr{F}$ 上之点 $\tilde{w}=0$，故 $\bar{\mathscr{F}}$ 上之点 $\tilde{w}=0$，而 $\mathscr{F}_1$ 上之点 $\tilde{w}\neq 0$，因 $c_1\neq 0$，故知 $\bar{\mathscr{F}}\not\supset\mathscr{F}_1$. 亦即 $\mathscr{F}$ 是孤立极限积分曲面。

注意到 $\tilde{w}\tilde{z}^{\Lambda}=\text{const}$ 可写成 $\tilde{z}\tilde{w}^{\frac{1}{\Lambda}}=\text{const}$，而

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a+bi}\right)=-\frac{b}{a^2+b^2}\neq 0,$$

当 $b\neq 0$，故同理可证 $\tilde{z}=0$ 为孤立极限积分曲面。

这样就有了两张孤立极限积分曲面。

下面要证明，没有其他的孤立极限积分曲面。

除 $\tilde{w}=0$，$\tilde{z}=0$ 外，任取两张积分曲面

$$\mathscr{F}_1:\tilde{w}\tilde{z}^{\Lambda}=c_1\neq 0\quad 及\quad \mathscr{F}_2:\tilde{w}\tilde{z}^{\Lambda}=c_2\neq 0.$$

如果 $\bar{\mathscr{F}}_1\supset\mathscr{F}_2$，则可证 $\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2$.

事实上，在 $\mathscr{F}_2$ 上任取一点，$(\tilde{w}_2,\ \tilde{z}_2)\neq(0,\ 0)$，

$$\tilde{w}_2=R_2e^{i\psi_2},\qquad \tilde{z}_2=\rho_2e^{i\phi_2}.$$

$\bar{\mathscr{F}}_1\supset\mathscr{F}_2$，故 $\mathscr{F}_1$ 上可取一系列的点

$$(\tilde{w}_1^{(n)},\ \tilde{z}_1^{(n)})=(R_1^{(n)}e^{i\psi_1(n)},\ \rho_1^{(n)}e^{i\phi_1(n)}),$$

使得 当 $n\to\infty$ 时，

$$R_1^{(n)}\to R_2\neq 0,\quad \rho_1^{(n)}\to\rho_2\neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\psi_1^{(n)}=\psi_2,\qquad \lim_{n\to\infty}\phi_1^{(n)}=\phi_2\qquad (\text{mod}\,2\pi).$$

由于$(\widetilde{w}_1^{(n)}, \widetilde{z}_1^{(n)})$在$\mathscr{S}_1$上，故

$$R_1^{(n)}=|c_1|e^{b\phi_1^{(n)}-a\ln\rho_1^{(n)}}$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\phi_1^{(n)}=\frac{1}{b}\Big[\lim_{n\to\infty}(a\ln\rho_1^{(n)}+\ln R_1^{(n)})-\ln|c_1|\Big]$$

$$=\frac{1}{b}[a\ln\rho_2+\ln R_2-\ln|c_1|]$$

存在并为有限数。

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\phi_1^{(n)}\equiv\phi_2 \pmod{2\pi}$，又可化为$\lim\limits_{n\to\infty}\phi_1^{(n)}=\phi_2+k2\pi$.

于是可推出c_1与c_2之关系如下：

$$c_1=(R_1^{(n)}e^{i\phi_1^{(n)}})(\rho_1^{(n)}e^{i\phi_1^{(n)}})^A$$

$$=\lim_{n\to\infty}[(R_1^{(n)}e^{i\phi_1^{(n)}})(\rho_1^{(n)}e^{i\phi_1^{(n)}})^A]$$

$$=(R_2e^{i\phi_2})(\rho_2e^{i(\phi_2+2\pi k)})^A$$

$$=(R_2e^{i\phi_2})(\rho_2e^{i\phi_2})^Ae^{i2\pi kA}$$

$$=c_2e^{i2\pi kA}.$$

但，$\widetilde{w}\widetilde{z}^A=c_2$与$e^{i2\pi kA}(\widetilde{w}\widetilde{z}^A)=c_2e^{i2\pi kA}=c_1$是同一积分曲面，即与$\widetilde{w}(\widetilde{z}e^{i2\pi k})^A=c_1$是同一积分曲面，即与$\widetilde{w}\widetilde{z}^A=c_1$是同一积分曲面。即$\mathscr{S}_2$与$\mathscr{S}_1$是同一积分曲面，(即$\mathscr{S}_2\equiv\mathscr{S}_1$)．故没有其他孤立极限积分曲面．定理 1.1 证毕．

§3. 结 点 型

定理 1.2 设方程组(1.1)为结点型，则所有的积分曲面均过奇点$w=z=0$，但没有孤立极限积分曲面。

证明 结点型之条件为$\mathrm{Im}(A)=0$，$\mathrm{Re}(A)<0$．这时有两种情形要分别加以证明，即$A\neq-1$和$A=-1$．

首先研究$A\neq-1$，则$\lambda_1\neq\lambda_2$，故(1.5)及(1.6)均可用．由此有通积分(1.6)及(1.9)如下：

$$\widetilde{w}(\widetilde{z})^{+a}=\text{const}, \qquad a<0 \tag{1.10}$$

及 $$R\rho^a e^{i(\psi+a\phi)}=\text{const}. \tag{1.11}$$

由此有

$$R=|c|\rho^{-a}, \qquad -a>0.$$

故当 $\rho\to0^+$，则 $R\to0$，亦即所有积分曲面均过奇点 $w=z=0$.

对于任意两张积分曲面$\mathscr{F}_1$：$\widetilde{w}(\widetilde{z})^a=c_1$ 及$\mathscr{F}_2$：$\widetilde{w}(\widetilde{z})^a=c_2$，有两种情形要分别研究，即$|c_1|\neq|c_2|$ 和 $|c_1|=|c_2|$.

当$|c_1|\neq|c_2|$，则 $R_1\rho_1^a=|c_1|\neq|c_2|=R_2\rho_2^a$。故 $\bar{\mathscr{F}}_1\not\supset\mathscr{F}_2$，$\bar{\mathscr{F}}_2\not\supset\mathscr{F}_1$. 即互不为极限曲面.

当$|c_1|=|c_2|$，则 $R_1\rho_1^a=|c_1|=|c_2|=R_2\rho_2^a$。 这时又分两种情形：

当 a 为无理数，则

$$\psi+a\phi=\text{const}.$$

在$(\psi,\phi)(\text{mod}2\pi)$环面上处处稠密，因此 $\bar{\mathscr{F}}_1\supset\mathscr{F}_2$，$\bar{\mathscr{F}}_2\supset\mathscr{F}_1$，即互为极限曲面，没有孤立极限曲面。

当 a 为有理数，则

$$\psi+a\phi=\text{const}.$$

在$(\psi,\ \phi)$ $(\text{mod}2\pi)$ 环面上为有限长的闭曲线。故 $\mathscr{F}_1$ 及 $\mathscr{F}_2$ 或者重合，或者互不为极限曲面，因此，也无孤立极限曲面.

现在研究 $\Delta=-1$ 之情形。这时 $\lambda_1=\lambda_2$，又分为两种情形加以证明，即方程组(1.1)化为

$$\frac{d\widetilde{w}}{dT}=\lambda_1\widetilde{w}, \qquad \frac{d\widetilde{z}}{dT}=\lambda_1\widetilde{z} \tag{1.12}$$

或

$$\frac{d\widetilde{w}}{dT}=\lambda_1\widetilde{w}+\lambda_1\widetilde{z}, \qquad \frac{d\widetilde{z}}{dT}=\lambda_1\widetilde{z}. \tag{1.13}$$

(1.12)之通积分为

$$\widetilde{w}\widetilde{z}^{-1}=\text{const},$$

与(1.10)是一类，可以按前面的证明得出结论。

(3.4)的通积分为

$$\tilde{w}=\tilde{z}(\ln\tilde{z}+C). \qquad (1.14)$$

取绝对值有

$$R=\rho|(\ln\rho+i\phi+c)|\leqslant\rho(|\ln\rho|+|\phi|+|c|)\to 0$$

当 ϕ，c 固定，$\rho\to 0^+$ 时成立．亦即积分曲面过奇点(0，0)．

任取两张积分曲面$\mathscr{F}_1$：$\tilde{w}=\tilde{z}(\ln\tilde{z}+c_1)$及$\mathscr{F}_2$：$\tilde{w}=\tilde{z}(\ln\tilde{z}+c_2)$．如果$\bar{\mathscr{F}}_2\supset\mathscr{F}_1$，则对$\mathscr{F}_1$上的任一点$P_1$：$(\tilde{w}_1,\ \tilde{z}_1)=(R_1e^{i\psi_1},\ \rho_1e^{i\phi_1})\neq(0,\ 0)$，$\mathscr{F}_2$上必有一系列点$\{(\tilde{w}_2^{(n)},\ \tilde{z}_2^{(n)})\}=\{(R_2^{(n)}e^{i\psi_2^{(n)}},\ \rho_2^{(n)}e^{i\phi_2^{(n)}})\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}R_2^{(n)}=R_1, \qquad \lim_{n\to\infty}\rho_2^{(n)}=\rho_1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\psi_2^{(n)}\equiv\psi_1, \qquad \lim_{n\to\infty}\phi_2^{(n)}\equiv\phi_1 \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

由

$$R_2^{(n)}=\rho_2^{(n)}|(\ln\rho_2^{(n)}+i\phi_2^{(n)}+c_2)|,$$

取极限得

$$R_1=\rho_1|(\ln\rho_1+i\lim_{n\to\infty}\phi_2^{(n)}+c_2)|.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_2^{(n)}$ 存在，并为有限数。由此关系

$$\lim_{n\to\infty}\phi_2^{(n)}\equiv\phi_1 \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$

又可化为关系

$$\lim_{n\to\infty}\phi_2^{(n)}=\phi_1+2\pi k,\ (k\ 为整数).$$

$$c_2-c_1=\left(\frac{\tilde{w}_2^{(n)}}{\tilde{z}_2^{(n)}}-\ln\tilde{z}_2^{(n)}\right)-\left(\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{z}_1}-\ln\tilde{z}_1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tilde{w}_2^{(n)}}{\tilde{z}_2^{(n)}}-\ln\tilde{z}_2^{(n)}\right)-\left(\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{z}_1}-\ln\tilde{z}_1\right)$$

$$=\left(\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{z}_1}-\lim_{n\to\infty}\ln(\rho_2^{(n)}e^{i\phi_2^{(n)}})\right)-\left(\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{z}_1}-\ln\rho_1e^{i\phi_1}\right)$$

$$= -i(\lim_{n\to\infty}\phi_2^{(n)} - \phi_1) = -i2\pi k,$$

即 $c_1 = c_2 + 2\pi k i$.

但 $\mathscr{F}_2$: $\widetilde{w} = \widetilde{z}(\ln\widetilde{z} + c_2)$ 与 $\widetilde{w} = (\widetilde{z}e^{i2\pi k})(\ln(\widetilde{z}e^{i2\pi k}) + c_2)$ 是同一曲面，即与 $\widetilde{w} = \widetilde{z}(\ln\widetilde{z} + c_2 + 2\pi k i)$ 是同一曲面，即与 $\widetilde{w} = \widetilde{z}(\ln\widetilde{z} + c_1)$ 是同一曲面. 故 $\mathscr{F}_2$ 与 $\mathscr{F}_1$ 为同一曲面，亦即由

$$\mathscr{F}_2 \supset \mathscr{F}_1 \text{ 导致 } \mathscr{F}_2 = \mathscr{F}_1,$$

故没有孤立极限曲面。定理 1.2 证毕.

§4. 中心鞍点型

定理 1.3 设方程组(1.1)为中心鞍点型，则只有两张积分曲面过奇点 $w = z = 0$，没有孤立极限曲面.

证明 由于 $\mathrm{Im}(\Lambda) = 0$，$\mathrm{Re}(\Lambda) > 0$，故 $\Lambda \neq -1$，故 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 因此(1.6)及(1.9)成立，并取下形:

$$\widetilde{w}(\widetilde{z})^a = \text{const}, \qquad a > 0 \tag{1.15}$$

及

$$Re^{i\psi}(\rho e^{i\phi})^a = \text{const}, \quad a > 0 \tag{1.16}$$

显然，$\widetilde{w} = 0$ 及 $\widetilde{z} = 0$ 为两张积分曲面且过奇点 $(w, z) = (0, 0)$.

由(1.16)知，$R\rho^a = \text{const}$，当此常数不为零时，

$$R\rho^a = |c| \neq 0,$$

则可求出 $\mathrm{Min}(R + \rho)$. 事实上，在极小值处有

$$\frac{d(R+\rho)}{d\rho} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{dR}{d\rho} = -1,$$

$$0 = \frac{d|c|}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}(R\rho^a) = \frac{dR}{d\rho}\rho^a + a\rho^{a-1}R = -\rho^a + a\rho^{a-1}R.$$

故 $\rho = aR$, $\quad R(aR)^a = |c|$, $\quad R = \left(\frac{|c|}{a^a}\right)^{\frac{1}{a+1}}$,

$$\rho = a\left(\frac{|c|}{a^a}\right)^{\frac{1}{a+1}}.$$

故 $$\mathrm{Min}(R+\rho)=\left(\frac{|c|}{a^{a}}\right)^{\frac{1}{1+a}}(1+a)>0.$$

亦即其他曲面均不过奇点$(w, z)=(0, 0)$.

下面证明不存在孤立极限曲面。

任取两张积分曲面 $\mathscr{F}_1$：$\widetilde{w}\widetilde{z}^{a}=c_1$, $\widetilde{w}\widetilde{z}^{a}=c_2$. 如果 $|c_1|\neq|c_2|$，则 $R_1\rho_1^a=|c_1|\neq|c_2|=R_2\rho_2^a$，故互相不为极限曲面，即 $\bar{\mathscr{F}}_1\not\supset\mathscr{F}_2$, $\bar{\mathscr{F}}_2\not\supset\mathscr{F}_1$.

当$|c_1|=|c_2|$时，则又分 a 为无理数及有理数。

当 a 为无理数，则 $\psi_1+a\phi_1=\text{const}$ 及 $\psi_2+a\phi_2=\text{const}$在环面$(\psi, \phi)\pmod{2\pi}$上处处稠密，亦即

$$\bar{\mathscr{F}}_1\supset\mathscr{F}_2, \qquad \bar{\mathscr{F}}_2\supset\mathscr{F}_1,$$

故无孤立极限积分曲面.

当 a 为有理数，则$\psi_1+a\phi_1=\text{const}$ 及$\psi_2+a\phi_2=\text{const}$ 在环面$(\psi, \phi)\pmod{2\pi}$上为有限长的闭曲线，因此或者重合，或者互相保持等距离。亦即或者$\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2$, 或者$\bar{\mathscr{F}}_1\not\supset\mathscr{F}_2$, $\bar{\mathscr{F}}_2\not\supset\mathscr{F}_1$, 故亦无孤立极限积分曲面。定理 1.3 证毕。

§5. 简单的小结

对于

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\alpha w+\beta z}{\gamma w+\delta z}, \qquad \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0,$$

$$\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & \beta\\ \gamma & \delta-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(\alpha+\delta)\lambda+(\alpha\delta-\beta\gamma)=0,$$

$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2).$$

$$\Lambda=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

则可分为三种类型：

类　型	解析判据	积分曲面族的拓扑结构	
		过奇点的积分曲面	孤立极限积分曲面
焦点型	$\mathrm{Im}(\Lambda)\neq 0$	所有的积分曲面	有且只有两张
结点型	$\mathrm{Im}(\Lambda)=0$ $\mathrm{Re}(\Lambda)<0$	所有的积分曲面	没　有
中心鞍点　型	$\mathrm{Im}(\Lambda)=0$ $\mathrm{Re}(\Lambda)>0$	有且只有两张	没　有

第二章　高次项的影响

§1. 分　类

研究方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dT}=\alpha w+\beta z+W_2(w,\ z)\\ \dfrac{dz}{dT}=\gamma w+\delta z+Z_2(w,\ z)\end{cases}\tag{2.1}$$

在奇点(0，0)附近的积分曲面的拓扑结构。其中$W_2(w,\ z)$，$Z_2(w,\ z)$为w，z二次以上的项。

本章研究$W_2(w,\ z)$及$Z_2(w,\ z)$对于拓扑结构的影响．仍设

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0\tag{2.2}$$

以及特征方程为

$$\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & \beta\\ \gamma & \delta-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+p\lambda+q=0\tag{2.3}$$

两特征根为λ_1及λ_2．定义

$$\Lambda=-\lambda_1/\lambda_2.\tag{2.4}$$

对于(1.1)的奇点(0,0)，分为三类：

(i)　$\mathrm{Im}(\Lambda)\neq 0$，仍称“焦点型”；

(ii)　$\mathrm{Im}(\Lambda)=0$，$\mathrm{Re}(\Lambda)<0$，仍称“结点型”；

(iii)　$\mathrm{Im}(\Lambda)=0$，$\mathrm{Re}(\Lambda)>0$，则称“临界型”．

对于$\alpha\delta-\beta\gamma=0$之情形，则称为高次奇点，可以看作一次奇

点的"汇合"。

以下将分别研究高次项对于拓扑结构的影响。

§2. 焦 点 型

定理 2.1 对于焦点型高次项不影响奇点附近积分曲面族的拓扑结构。

证明 焦点型有 $\mathrm{Im}(\Lambda)\neq 0$，故 $\lambda_1\neq\lambda_2$，可经过非奇异的线性变换将方程组(2.1)化为

$$\frac{dw}{dT}=\lambda_1 w+P(w,\ z),\quad \frac{dz}{dT}=\lambda_2 z+Q(w,\ z),\qquad (2.5)$$

其中

$$P(w,\ z)=\sum_{j+k\geq 2} p_{jk}w^j z^k,$$
$$Q(w,\ z)=\sum_{j+k\geq 2} q_{jk}w^j z^k,\qquad (2.6)$$

在$(w,\ z)=(0,\ 0)$ 附近收敛。

下面证明，一定存在变换

$$w=\xi+\sum_{j+k\geq 2} c_{jk}\xi^j\eta^k,$$
$$z=\eta+\sum_{j+k\geq 2} d_{jk}\xi^j\eta^k,\qquad (2.7)$$

使得(1.5)化为方程组

$$\frac{d\xi}{dT}=\lambda_1\xi,\qquad \frac{d\eta}{dT}=\lambda_2\eta.\qquad (2.8)$$

则由前一章的定理 1.1 即可得结论。

现在证明归结为级数(2.7)的存在性和收敛性。首先证明c_{jk}及 d_{jk} 的存在性。为此，将(2.5)写成

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dT}-\lambda_1 w=\displaystyle\sum_{j+k\geq 2} p_{jk}w^j z^k=P(w,\ z),\\ \dfrac{dz}{dT}-\lambda_2 z=\displaystyle\sum_{j+k\geq 2} q_{jk}w^j z^k=Q(w,\ z).\end{cases}\qquad (2.9)$$

将(2.7)代入(2.9)，并利用(2.8)，将(2.9)化为ξ及η的幂级数，得到关系

$$
\left\{\begin{aligned}
&\sum_{j,k}\{(j-1)\lambda_1+k\lambda_2\}c_{jk}\xi^j\eta^k\\
&\quad=P(\xi+\sum_{j,k}c_{jk}\xi^j\eta^k,\ \eta+\sum_{j,k}d_{jk}\xi^j\eta^k),\\
&\sum_{j,k}\{j\lambda_1+(k-1)\lambda_2\}d_{jk}\xi^j\eta^k\\
&\quad=Q(\xi+\sum_{j,k}c_{jk}\xi^j\eta^k,\ \eta+\sum_{j,k}d_{jk}\xi^j\eta^k).
\end{aligned}\right.\tag{2.10}
$$

求和中的j，k满足条件：

$$j,\ k=0,\ 1,\ 2\cdots;\ j+k\geqslant 2.$$

由于$\mathrm{Im}(\Lambda)\neq 0$，故

$$(j-1)\lambda_1+k\lambda_2\neq 0,\qquad j\lambda_1+(k-1)\lambda_2\neq 0.$$

另一方面$P(w,\ z)$，$Q(w,\ z)$为w，z的二次以上的项，故依$j+k$之次序展开，对于$\xi^j\eta^k$的系数有关系：

$$
\left\{\begin{aligned}
&\{(j-1)\lambda_1+k\lambda_2\}c_{jk}=\text{已经求出的数的组合},\\
&\{j\lambda_1+(k-1)\lambda_2\}d_{jk}=\text{已经求出的数的组合}.
\end{aligned}\right.\tag{2.11}
$$

由此，c_{jk}及d_{jk}可以依次唯一决定。

注意到$\mathrm{Im}(\Lambda)\neq 0$，故在$\lambda$复平面上，$\lambda_1$及$\lambda_2$的联线不过原点。由原点到此联线的最短距离为$s$，则有

$$
\left\{\begin{aligned}
&|(j-1)\lambda_1+k\lambda_2|\geqslant s(j+k-1),\\
&|j\lambda_1+(k-1)\lambda_2|\geqslant s(j+k-1),
\end{aligned}\right.\tag{2.12}
$$

对于j，$k=0,1,2,\cdots;j+k\geqslant 2$成立。

设$P(w,\ z)$，$Q(w,\ z)$在$|w|\leqslant R$，$|z|\leqslant R$中正则，并可有$M>0$，使当$|w|\leqslant R$，$|z|\leqslant R$，有$|P(w,z)|\leqslant M$，$|Q(w,z)|\leqslant M$。则由柯西系数定理知

$$|p_{jk}|\leqslant\frac{M}{R^{j+k}},\qquad |q_{jk}|\leqslant\frac{M}{R^{j+k}}.$$

故P、Q在$|w|+|z|\leqslant R$中有长函数

$$M\sum_{\substack{j,k\geq 0\\ j+k\geq 2}}\frac{|w|^j|z|^k}{R^{j+k}}\ll M\sum_{j+k=2}^{\infty}\left(\frac{|w|+|z|}{R}\right)^{j+k}$$

$$=M\left[\frac{1}{1-\frac{|w|+|z|}{R}}-1-\frac{|w|+|z|}{R}\right]$$

$$=K(|w|+|z|). \tag{2.13}$$

$$K(U)=M\left[\frac{1}{1-\frac{U}{R}}-1-\frac{U}{R}\right].$$

(2.9)利用(2.7)及(2.8)相当于偏微分方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial \xi}\lambda_1\xi+\frac{\partial w}{\partial \eta}\lambda_2\eta-\lambda_1 w=P(w, z),\\ \frac{\partial z}{\partial \xi}\lambda_1\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}\lambda_2\eta-\lambda_2 z=Q(w, z).\end{cases} \tag{2.14}$$

则利用(2.12)及(2.13)可作(2.14)的长方程组

$$\begin{cases}s\left(\frac{\partial w^*}{\partial \xi}\xi+\frac{\partial w^*}{\partial \eta}\eta-w^*\right)=K(w^*+z^*),\\ s\left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi}\xi+\frac{\partial z^*}{\partial \eta}\eta-z^*\right)=K(w^*+z^*).\end{cases} \tag{2.15}$$

其解为

$$\begin{cases}w^*=\xi+\sum c^*_{jk}\xi^j\eta^k\\ z^*=\eta+\sum d^*_{jk}\xi^j\eta^k\end{cases} \tag{2.16}$$

显然有 $|c_{jk}|\leqslant c^*_{jk}$, $|d_{jk}|\leqslant d^*_{jk}$, (2.17)

故只须研究(2.16)之收敛性。则定理 2.1 得证。

c^*_{jk} 及 d^*_{jk} 由方程组

$$\begin{cases}\sum_{j,k}s\{(\alpha-1)+\beta\}c^*_{jk}\xi^j\eta^k=K(w^*+z^*),\\ \sum_{j,k}s\{\alpha+\beta-1\}d^*_{jk}\xi^j\eta^k=K(w^*+z^*),\end{cases} \tag{2.18}$$

而定。

命 $U=w^*+z^*$, $V=\xi+\eta$, (2.19)

则(2.15)及(2.16)化为

$$s\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\xi+\frac{\partial U}{\partial \eta}\eta-U\right)=2K(U) \tag{2.20}$$

及

$$U=V+\sum\{c^*_{jk}+d^*_{jk}\}\xi^j\eta^k. \tag{2.21}$$

U 为 $V=\xi+\eta$ 之函数，故

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}=\frac{\partial U}{\partial \eta}=\frac{dU}{dV}.$$

因此，(2.20)可化为常微分方程

$$s\left(\frac{dU}{dV}V-U\right)=2K(U). \tag{2.22}$$

下面求(2.22)的下形之解：

$$U=V+\sum_{k=2}^{\infty}c_kV^k, \tag{2.23}$$

则有

$$s\sum_{k\geqslant 2}(k-1)c_kV^k=2K\left(V+\sum_{k=2}^{\infty}c_kV^k\right), \tag{2.24}$$

则

$$c_l\geqslant c^*_{jk}\geqslant 0,\quad c_l\geqslant d^*_{jk}\geqslant 0\quad (j+k=l). \tag{2.25}$$

(2.20)又可用

$$s(y-x)=2K(y) \tag{2.26}$$

来加以控制，其中

$$y=x+\sum_{k\geqslant 2}r_kx^k. \tag{2.27}$$

则显然有

$$r_k\geqslant c_k\geqslant 0. \tag{2.28}$$

而(2.27)则可由(2.26)

$$\begin{aligned}sy&=sx+2K(y)\\&=sx+2M\left[\frac{1}{1-\frac{y}{R}}-1-\frac{y}{R}\right],\end{aligned}$$

直接解得

$$y=\frac{s+\frac{sx}{R}-\sqrt{s^2-\left(\frac{8sM}{R^2}+\frac{2s^2}{R}\right)x+\frac{s^2}{R^2}x^2}}{2\left(\frac{2M}{R^2}+\frac{s}{R}\right)}$$

展开后得到。(2.27)在

$$x<x_0=R-\frac{4M}{s}\left[\sqrt{1+\frac{1}{2}\ \frac{sR}{M}}-1\right]$$

中收敛。定理 2.1 得证。

§3. 结 点 型

结点型的情况比较复杂，当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，仍可化为(2.5)之形式，即

$$\frac{dw}{dT}=\lambda_1 w+P(w,\ z),\quad \frac{dz}{dT}=\lambda_2 z+Q(w,\ z),\tag{2.29}$$

而当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，要分别化为两种类型，即

$$\frac{dw}{dT}=w+P(w,\ z),\qquad \frac{dz}{dT}=z+Q(w,\ z),\tag{2.30}$$

及

$$\frac{dw}{dT}=w+z+P(w,z),\quad \frac{dz}{dT}=z+Q(w,\ z).\tag{2.31}$$

定理 2.2 对于结点型，如果 λ_1/λ_2 及 λ_2/λ_1 均不为正整数，则高次项不影响奇点附近积分曲面族的拓扑结构。

证明 对于结点型，$\lambda_1/\lambda_2>0$，故在 λ 复平面上，λ_1 及 λ_2 之联线不过原点，但联线之延长线过原点。因此，在条件 j，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$；$j+k\geqslant 2$ 下，又设 λ_1/λ_2 及 λ_2/λ_1 均不为正整数，故有

$$\begin{cases}(j-1)\lambda_1+k\lambda_2\neq 0,\\ j\lambda_1+(k-1)\lambda_2\neq 0.\end{cases}\tag{2.32}$$

这是因为$(j-1)\lambda_1+k\lambda_2=0$只有$j=0$及$\lambda_1/\lambda_2=k\geqslant 2$，及$j\lambda_1+(k-1)\lambda_2=0$只有$k=0$及$\lambda_2/\lambda_1=j\geqslant 2$。由此，仍可由(2.11)唯一地依次解出$c_{jk}$及$d_{jk}$。

其次，当$j-1\geqslant 0$，$k\geqslant 0$，$j+k\geqslant 2$，则

$$\left|\frac{(j-1)\lambda_1+k\lambda_2}{j+k-1}\right|\geqslant\min(|\lambda_1|,\ |\lambda_2|),$$

当 $j=0$，$k\geqslant 2$，则

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{-\lambda_1+k\lambda_2}{-1+k}\right|=|\lambda_2|>0.$$

故可有正整数k_1存在，使当$k>k_1$有

$$\left|\frac{-\lambda_1+k\lambda_2}{-1+k}\right|\geqslant\frac{|\lambda_2|}{2}.$$

而对有限个k，$2\leqslant k\leqslant k_1$，则已知

$$\left|\frac{-\lambda_1+k\lambda_2}{-1+k}\right|>0,$$

故可有

$$s_1=\min\left(|\lambda_1|,\ \frac{|\lambda_1|}{2},\ \left|\frac{-\lambda_1+2\lambda_2}{-1+2}\right|,\cdots,\left|\frac{-\lambda_1+k_1\lambda_2}{-1+k_1}\right|\right)>0$$

使得，在条件 $j,k=0,1,2,\cdots$；$j+k\geqslant 2$ 下

$$|(j-1)\lambda_1+k\lambda_2|\geqslant s_1(j+k-1). \tag{2.33}$$

同理可以求出$s_2>0$使得在上述条件下，

$$|j\lambda_1+(k-1)\lambda_2|\geqslant s_2(j+k-1). \tag{2.34}$$

取 $s=\min(s_1,\ s_2)>0$，则(2.12)成立。这样，定理2.1的证法全部可以照用。定理2.2证毕。

定理 2.3 对于结点型，如果$\lambda_1=n\lambda_2$或$\lambda_2=n\lambda_1$，$n>1$，则高次项亦不影响奇点附近的积分曲面族的拓扑结构。

证明 只需研究$\lambda_1=n\lambda_2$，$n>1$的情形即可，因两特征根的标号并无特别意义。

这时证明的困难在于，当$j=0$，$k=n>1$时，关系(2.11)中

的 c_{ok} 的系数为零，因此，c_{ok} 不能决定，这一式可能不满足。

为了克服这一困难，将方程组(2.8)改为

$$\frac{d\xi}{dT}=\lambda_1\xi+a\eta^n, \qquad \frac{d\eta}{dT}=\lambda_2\eta. \tag{2.35}$$

则对于(2.7)中 $j=0$，$k=n$ 一项有关系

$$0=\{-\lambda_1+n\lambda_2\}c_{on}=-a+\text{已知数}.$$

由此可定出 a，并可取 c_{on}。其他项照算。则除 $j=0$，$k=n$ 一项外，对于 j，$k=0,1,2,\cdots;j+k\geqslant 2$，一定存在 $s>0$，使得

$$|(j-1)\lambda_1+k\lambda_2|\geqslant s(j+k-1),$$
$$|j\lambda_1+(k-1)\lambda_2|\geqslant s(j+k-1).$$

长方程(2.18)将改成

$$\begin{cases} s\sum\limits_{j,k}(j+k-1)c^*_{jk}\xi^j\eta^k \\ =|a|\eta^n+|a|\sum\limits_{j,k}jc^*_{jk}\xi^{j-1}\eta^{k+n}+K(w^*+z^*), \\ s\sum\limits_{j,k}(j+k-1)d^*_{jk}\xi^j\eta^k \\ =|a|\sum\limits_{j,k}jd^*_{jk}\xi^{j-1}\eta^{k+n}+K(w^*+z^*). \end{cases} \tag{2.36}$$

$$j,k=0,1,2,\cdots; \qquad j+k\geqslant 2.$$

显然有

$$c^*_{jk}\geqslant c_{jk}\geqslant 0, \qquad d^*_{jk}\geqslant d_{jk}\geqslant 0. \tag{2.37}$$

关系(2.36)是由偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w^*}{\partial\xi}(s\xi-|a|\eta^n)+\dfrac{\partial w^*}{\partial\eta}s\eta=sw^*+K(w^*+z^*), \\ \dfrac{\partial z^*}{\partial\xi}(s\xi-|a|\eta^n)+\dfrac{\partial z^*}{\partial\eta}s\eta=sz^*+K(w^*+z^*). \end{cases} \tag{2.38}$$

经过代换

$$w^*=\xi+\sum_{j+k\geqslant 2}c^*_{jk}\xi^j\eta^k, \qquad z^*=\eta+\sum_{j+k\geqslant 2}d^*_{jk}\xi^j\eta^k \tag{2.39}$$

得到的。

对(2.38)再作长方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w^*}{\partial \xi}(s\xi - |a|(\xi+\eta)^n) + \dfrac{\partial w^*}{\partial \eta} s\eta \\
\qquad = sw^* + K(w^* + z^*), \\
\dfrac{\partial z^*}{\partial \xi}(s\xi - |a|(\xi+\eta)^n) + \dfrac{\partial z^*}{\partial \eta} s\eta \\
\qquad = sz^* + K(w^* + z^*).
\end{cases}
\tag{2.40}
$$

在(2.40)中命

$U = w^* + z^*$,　　$V = \xi + \eta$，则得

$$
\frac{\partial U}{\partial \xi}(s\xi - |a|V^n) + \frac{\partial U}{\partial \eta} s\eta = sU + 2K(U). \tag{2.41}
$$

求　$U = U(V)$之解，则

$$
\frac{dU}{dV} = \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \eta}.
$$

故由(2.41)有

$$
\frac{dU}{dV}(sV - |a|V^n) = sU + 2k(U). \tag{2.42}
$$

这是U对V的常微分方程，可用

$$
U = V + \sum_{l \geq 2} c_l V^l \tag{2.43}
$$

代入求解，即

$$
\begin{aligned}
U &= (\xi + \eta) + \sum_{l \geq 2} c_l (\xi + \eta)^l \\
&= \xi + \eta + \sum_{j+k \geq 2} e_{jk} \xi^j \eta^k
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

则　　$e_{jk} \geqslant c^*_{jk} \geqslant 0$,　　　　$e_{jk} \geqslant d^*_{jk} \geqslant 0$.

要求c_l，可将(2.43)之U代入(2.42)则有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l \geq 2} (l-1) c_l V^l \\
&= \frac{|a|V^{n-1}(V + \sum_{l \geq 2} c_l V^l) + 2K(V + \sum_{l \geq 2} c_l V^l)}{s - |a|V^{n-1}}.
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

双方对V展成幂级数，双方系数均为正数，故依次可以定出 c_l $(l\geqslant 2)$。

为了简单计，还可以用代数方程来控制(2.45)，即将方程左方之 $l-1$ $(l\geqslant 2)$用 1 代替，有

$$U-V=\frac{|a|V^{n-1}U+2K(U)}{s-|a|V^{n-1}}$$

$$=\frac{|a|V^{n-1}U+2M\left[\dfrac{1}{1-\dfrac{U}{R}}-1-\dfrac{U}{R}\right]}{s-|a|V^{n-1}}. \tag{2.46}$$

这是U的二次方程，由它可解出一解为

$$U=V+\sum_{l\geqslant 2}f_lV^l. \tag{2.47}$$

则显然有

$$f_l\geqslant c_l\geqslant 0. \tag{2.48}$$

这样证明了级数(2.43)在原点附近的收敛性，从而保证方程化为(2.35)的形式。

当 $a=0$ 时，已经证明。

当 $a\neq 0$ 时，(2.35)有通积分

$$\xi=\eta^n\left[\frac{a}{\lambda_2}\ln\eta+c\right]. \tag{2.49}$$

可以验证，所有积分曲面到原点，并且没有孤立极限积分曲面。定理 2.3 证毕。

定理 2.4 对于结点型，当 $\lambda_1=\lambda_2$，并为(2.30)的类型，则高次项不影响奇点附近积分曲面族的拓扑结构。

证明 从(2.11)可见 c_{jk} 及 d_{jk} 的系数

$$(j-1)\lambda_1+k\lambda_2=(j+k-1)\lambda_1\neq 0,$$

$$j\lambda_1+(k-1)\lambda_2=(j+k-1)\lambda_1\neq 0.$$

并可取 $s=|\lambda_1|$，则不等式

$$|(j-1)\lambda_1+k\lambda_2|\geqslant s(j+k-1)$$
$$|j\lambda_1+(k-1)\lambda_2|\geqslant s(j+k-1)$$

对 $j+k\geqslant 2$ 自动满足。因此，(2.33)经(2.43)可化为

$$\frac{d\xi}{dT}=\lambda_1\xi, \qquad \frac{d\eta}{dT}=\lambda_1\eta.$$

故奇点附近所有积分曲面到原点，但没有孤立极限积分曲面。定理 2.4 证毕。

定理 2.5 对于结点型，如果能化为

$$\frac{dw}{dT}=w+z+P(w,\ z), \quad \frac{dz}{dT}=z. \tag{2.50}$$

$P(w,\ z)=\sum_{j+k\geqslant 2}p_{jk}w^jz^k$ 在原点附近收敛，则 $P(w,\ z)$ 也不影响奇点附近的积分曲面族的拓扑结构，亦即奇点附近所有积分曲面到奇点，并且没有孤立极限积分曲面。

证明 用代换

$$z=\eta^2, \tag{2.51}$$

则方程组(2.50)可化为

$$\frac{dw}{d\eta}=\frac{2w+2\eta^2+2P(w,\eta^2)}{\eta}=\frac{2w+R(w,\eta)}{\eta}, \tag{2.52}$$

其中 $R(w,\eta)$ 为 w,η 的二次以上的项. (2.52)是 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$ 即 $\lambda_1=2\lambda_2$，即 $\lambda_1/\lambda_2=2>1$。由定理 2.3 知对于(2.52)，在 $(w,\ \eta)=(0,0)$ 附近，所有积分曲面到 $(w,\eta)=(0,\ 0)$，因此在 $(w,\ z)=(0,\ 0)$ 附近(2.50)的所有积分曲面到 $(w,\ z)=(0,\ 0)$。(2.52)在 $(w,\ \eta)=(0,\ 0)$ 附近没有孤立极限积分曲面，而(2.51)不改变闭包的性质，因此，(2.50)在 $(w,z)=(0,0)$ 附近也没有孤立极限积分曲面。故 $P(w,\ z)$ 不改变奇点附近积分曲面族的拓扑性质。定理 2.5 证毕。

对于结点型只余下一种情形，即(2.34)的一般情形。当此情形，则(2.35)将有 $\lambda_1=\lambda_2=n=1$，由此也决定出 $a=1$。这时方程

(2.42)化为

$$\frac{dU}{dV}(s-1)V=sU+2K(U).$$

这个方程没有(2.43)形

$$U=V+\sum_{l>2}c_lV^l$$

的解。情况有待进一步研究。

总结上面四个定理可得：

定理 2.6 对于结点型，除了一种情形例外，一般高次项均不影响奇点附近积分曲面族的拓扑结构。例外情形为 $\lambda_1=\lambda_2$，并且是(2.34)中不能化为(2.50)的类型。这是结点型的临界情形。

§4. 临 界 型

定理 2.7 对于(2.1)，如果 $\mathrm{Im}(\Lambda)=0$，但 $\mathrm{Re}(\Lambda)>0$，则有两张积分曲面过奇点 $(w,z)=(0,0)$。

证明 这时方程组(2.1)经非奇异线性变换，可以化为：

$$\frac{dw}{dT}=-\Lambda w+P(w,z),\quad \frac{dz}{dT}=z+Q(w,z),\tag{2.53}$$

其中 $\Lambda>0$；P，Q 为高次项。

$$P(w,z)=\sum_{j+k>2}p_{jk}w^jz^k,\quad Q=\sum_{j+k>2}q_{jk}w^jz^k,\tag{2.54}$$

则一定存在正则解

$$w=w(z)=\sum_{j=2}^{\infty}c_jz^j.\tag{2.55}$$

为了证明这一点，可令

$w=z\cdot w_1$ 代入(2.53)并消去 dT，则有

$$\frac{dw_1}{dz}=\frac{(-\Lambda-1)w_1z+\sum\limits_{j+k>2}p_{jk}w_1^jz^{j+k}-w_1\sum\limits_{j+k>2}q_{jk}w_1^jz^{j+k}}{z\left[z+\sum\limits_{j+k>2}q_{jk}w_1^jz^{k+j}\right]}$$

$$=\frac{(-\Lambda-1)w_1+z\sum\limits_{j+k>0}r_{jk}w_1^jz^k}{z}$$

$$=\frac{(-\Lambda-1)w_1+zR(w_1, z)}{z}. \tag{2.56}$$

现以

$$w_1=\sum_{j=2}^{\infty}c_j z^{j-1} \tag{2.57}$$

代入(2.56)，则有

$$(2-1)c_2+(3-1)c_3z+(4-1)c_4z^2+\cdots$$
$$=(-\Lambda-1)c_2+(-\Lambda-1)c_3z+(-\Lambda-1)c_4z^2+\cdots$$
$$+R\left(\sum_{j=2}^{\infty}c_j z^{j-1}, z\right)$$

亦即

$$(2+\Lambda)c_2+(3+\Lambda)c_3z+(4+\Lambda)c_4z^2+\cdots$$
$$=r_0+r_1z+r_2z^2+\cdots.$$

因此，依次可以唯一地解出 c_2，c_3，…。故级数(2.57)唯一决定了。

要研究收敛性，对于 $R(w,z)$取一个长函数，例如

$$M(w,z)=\frac{M}{1-\dfrac{w+z}{R}};$$

则由长方程

$$(2+\Lambda)U=M(Uz,z)=\frac{M}{1-\dfrac{Uz+z}{R}}$$

得到U之二次方程，其一解为：

$$U=\left\{(2+\Lambda)\left(1-\frac{z}{R}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{(2+\Lambda)^2\left(1-\frac{z}{R}\right)^2-4M(2+\Lambda)\frac{z}{R}}\right\}\Big/2(2+\Lambda)\frac{z}{R}$$
$$=u_2+u_3z+u_4z^2+\cdots.$$

其中 $u_2=M/(2+\Lambda)$。由长方程的性质可知

$$u_j \geqslant |c_j| \geqslant 0 \qquad (j=2,3,\cdots).$$

这个级数在

$$|z|<|z_0|=R\{(2+\Lambda)+2M-2\sqrt{M^2+M(2+\Lambda)}\}/(2+\Lambda)$$

中收敛。故(2.55)为一正则解。显然，当 $z\to 0$，有 $w\to 0$。故这一积分曲面过奇点(0,0)。

以 $T'=-\Lambda T$，则(2.53)可化为

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dT'}=\left(-\dfrac{1}{\Lambda}\right)z+\left(-\dfrac{Q(w,z)}{\Lambda}\right),\\ \dfrac{dw}{dT'}=w+\left(-\dfrac{P(w,z)}{\Lambda}\right).\end{cases} \tag{2.58}$$

由于 $1/\Lambda>0$，故(2.58)与(2.53)之性质相同，只不过将 z 与 w 对调。同理可以证明，存在正则解

$$z=z(w)=d_2w^2+d_3w^3+d_4w^4+\cdots. \tag{2.59}$$

这又是一张到奇点(0,0)的积分曲面。

因此，有两张到奇点(0,0)的积分曲面，并且在奇点是正则的。定理 2.7 证毕。

注意，在实域的鞍点附近求(2.55)及(2.58)，则可见所有的 c_j 及 d_j 都是实数。(2.55)及(2.58)表示过实鞍点的两条实曲线的方程。

§5. 简单的小结

对于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dT}=\alpha w+\beta z+P(w,z),\\ \dfrac{dz}{dT}=\gamma w+\delta z+Q(w,z),\end{cases}$$

$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$，$P$，$Q$ 为非线性项，

$$\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & \beta\\ \gamma & \delta-\lambda\end{vmatrix}\equiv\lambda^2+p\lambda+q\equiv(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2),$$

$$\Lambda=-\lambda_1/\lambda_2,$$

则可依性质分为三类：

类　型	解析判据	奇点附近积分曲面族的拓扑结构	
		过奇点的曲面	孤立极限积分曲面
焦点型	$\mathrm{Im}(\Lambda)\neq 0$	所有的曲面	有，而且只有两张
结点型	$\mathrm{Im}(\Lambda)=0$ $\mathrm{Re}(\Lambda)<0$ ($\mathrm{Re}(\Lambda)=-1$ 中初等因子为 1 个，并不能化为(2.50)的情况除外)	所有的曲面	没有
临界型	$\mathrm{Im}(\Lambda)=0$ $\mathrm{Re}(\Lambda)>0$	至少有两张	由高次项决定

下面将转入高阶焦点的研究。

第三章　高阶焦点

§1.　焦点的阶数

下面研究实方程组

$$\frac{dx}{dt}=y+P(x,y),\qquad \frac{dy}{dt}=-x+Q(x,y),\tag{3.1}$$

其中 $P(x,y)$，$Q(x,y)$为高次项。为了判定奇点 (0,0) 是中心或焦点，庞加莱和李雅普诺夫已经发展了一整套的方法。

现将庞加莱的算法简述如下：

将(3.1)写成展开式：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=X(x,y)\equiv X_1+X_2+\cdots\equiv y+X_2+X_3+\cdots,\\ \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y)\equiv Y_1+Y_2+\cdots\equiv -x+Y_2+Y_3+\cdots,\end{cases}\tag{3.1}$$

X_j，Y_j为 x，y 之 j 次齐次多项式。

取一形式级数

$$\begin{aligned}F(x,\ y)&\equiv F_2(x,\ y)+F_3(x,\ y)+\cdots\\ &\equiv(x^2+y^2)+F_3(x,\ y)+\cdots.\end{aligned}\tag{3.2}$$

研究形式表示

$$\Phi(x,\ y)\equiv\frac{\partial F}{\partial x}X+\frac{\partial F}{\partial y}Y$$

$$\equiv\left(\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}X_k\right)+\left(\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}Y_k\right)$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{\substack{i\geq 2,k\geq 1\\ i+k=n}}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}X_k+\frac{\partial F_i}{\partial y}Y_k\right). \qquad (3.3)$$

引入记号

$$\Phi_{ik}=\frac{\partial F_i}{\partial x}X_k+\frac{\partial F_i}{\partial y}Y_k,$$

便有

$$\Phi(x,\ y)=\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{\substack{i\geq 2,k\geq 1\\ i+k=n}}\Phi_{ik}.$$

现在要求 F_3，F_4，$F_5\cdots$使得 $\Phi=0$。依次对 $n=3$，4，5，… 将上式右方之项置为零，即有

$$\begin{aligned}&\Phi_{21}=0,\\&\Phi_{31}=-\Phi_{22},\\&\Phi_{41}=-\Phi_{32}-\Phi_{23},\\&\cdots\cdots\cdots,\\&\Phi_{p-1,1}=-\Phi_{p-2,2}-\Phi_{p-3,3}-\cdots-\Phi_{2,p-2},\\&\cdots\cdots\cdots.\end{aligned}$$

上面的第一式自动成立，即

$$\Phi_{21}=\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}y+\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}(-x)=0.$$

以后各式，依次是 F_3，F_4，… 所满足的偏微分方程。这里，左方 $\Phi_{p-1,1}$ 是 F_{p-1} 的函数，右方则为 F_{p-2}，F_{p-3}，…，F_2 的函数。因此，依次解这一系列的方程，则右方均为已知。故要求解的方程的一般形式为：

$$y\frac{\partial F_q}{\partial x}-x\frac{\partial F_q}{\partial y}=H_p. \qquad (3.4)$$

其中 F_q 是待求的 x，y 的 q 次齐次多项式，H_q 是已知的 x，y 的 q 次齐次多项式。现在要解出 F_q。为此，引入极坐标

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega.$$

则可得

$$y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial \omega},$$

以及

$$F_q=\rho^q\varphi(\omega), \qquad H_q=\rho^q\psi(\omega).$$

将 $\varphi(w)$ 及 $\psi(w)$ 展为三角多项式，即

$$\varphi(\omega)=\sum_k A_k\cos k\omega+\sum_k B_k\sin k\omega,$$

$$\psi(\omega)=\sum_k C_k\cos k\omega+\sum_k D_k\sin k\omega,$$

此处当 q 为奇数时，则 $k=1, 3, 5, \cdots, q-2, q$；而当 q 为偶数时，则 $k=0, 2, 4, 6, \cdots, q-2, q$。值得注意的是，当 q 为偶数时，$k=0$ 时，$\psi(w)$ 可能有 c_0 之项。

现在(3.4)可化为

$$-\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=\psi(\omega).$$

这个方程对 $\varphi(\omega)$ 有解之充要条件是 $\psi(\omega)$ 不具有常数项，亦即

$$C_0=0.$$

这是因为 $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ 不具常数项，故 $\varphi(\omega)$ 有解之必要条件为 $\psi(\omega)$ 也不具常数项；反之，当 $\psi(\omega)$ 不具常数项，则可以求出 A_k，B_k 如下：

$$A_k=\frac{D_k}{k}, \qquad B_k=-\frac{C_k}{k}, \qquad (k\neq 0).$$

对 $k=0$，B_0 不出现，A_0 取任何数均可，这就证明了 $C_0=0$ 是 $\varphi(\omega)$ 有解之充分条件。

当 q 为奇数，则 k 只取 1, 3, 5, …, q 等奇数，故 C_0 自然为零，因此 $\varphi(\omega)$ 有解，从而 $F_q(x, y)$ 有解。

由此可知，对 q 为奇数，又 F_2，$F_3, \cdots, F_{q-1}$ 均已解出时，则 F_q 亦可解出。

当 q 为偶数，又 $F_2, F_3, \cdots, F_{q-1}$ 均已解出时，如果 $C_0=0$，

F_q 可以求出。如果 $C_0 \neq 0$，则方程

$$\psi(\omega)+\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=0$$

无解。但方程

$$\psi(\omega)+\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=C_0$$

有解 $\varphi(\omega)$，只需取

$$A_k=\frac{D_k}{k}, \qquad B_k=-\frac{C_k}{k} \qquad (k=2,\ 4,\ \cdots,\ q),$$

及 A_0 为任何常数均可。这个方程等价于

$$H_q-y\frac{\partial F_q}{\partial x}+x\frac{\partial F_q}{\partial y}=C_0(x^2+y^2)^{q/2}.$$

现在，在实域中可证方程(3.1)在某一个 $C_0 \neq 0$ 的条件下是一个实焦点。为此，只需取函数

$$G(x,\ y)=F_2+F_3+\cdots+F_q,$$

则对 $k>0$，k 足够小时，在原点附近

$$G(x,\ y)=k$$

为一系列闭曲线，并且

$$\frac{dG(x,\ y)}{dt}=-C_0(x^2+y^2)^{q/2}+\Phi_{q+1}(x,\ y).$$

此处 Φ_{q+1} 是 x，y 的 $q+1$ 次以上的项。

这式表明，当某一 $C_0 \neq 0$，则(3.1)在原点是焦点，$q/2$ 称为这个焦点的阶。

如果对所有的偶数 q，$C_0=0$，则(3.1)在原点是中心。

§2. 复域的处理

下面转入复域的解析形式的处理方法。

对于实方程组

$$\frac{dx}{dt}=y+P(x,\ y),\qquad \frac{dy}{dt}=-x+Q(x,\ y)。\tag{3.1}$$

求两个函数

$$\Phi(x,\ y)=(x+iy)+F_2(x,\ y)+F_3(x,\ y)+\cdots,\tag{3.5}$$

$$M(x,\ y)=(-i)+M_1(x,\ y)+M_2(x,\ y)+\cdots,\tag{3.6}$$

使得

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt}&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}(y+P)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(-x+Q)\\&=M\Phi。\end{aligned}\tag{3.7}$$

双方按同次幂相等，即有一系列等式

1 次 $\qquad y-ix=-i(x+iy),$

2 次 $\qquad y\dfrac{\partial F_2}{\partial x}-x\dfrac{\partial F_2}{\partial y}+iF_2=(x+iy)M_1+R_2(x,\ y),$

3 次 $\qquad y\dfrac{\partial F_3}{\partial x}-x\dfrac{\partial F_3}{\partial y}+iF_3=(x+iy)M_2+R_3(x,\ y),$

$\qquad\cdots\cdots,$

$(n+1)$次 $\qquad y\dfrac{\partial F_{n+1}}{\partial x}-x\dfrac{\partial F_{n+1}}{\partial y}+iF_{n+1}$

$\qquad\qquad=(x+iy)M_n+R_{n+1}(x,\ y),$

$\qquad\cdots\cdots。$

这里 $R_j(x,\ y)$为 x，y 之 j 次齐次多项式，并由前面的方程所决定，故依次解此方程组时为已知的。F_{n+1},M_n 是要同时求出的。

为此，同样可命

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega,$$

代入则有

$$F_q=\rho^q\varphi_q(\omega),\qquad M_{q-1}=\rho^{q-1}m_{q-1}(\omega),\qquad R_q=\rho^q\psi_q(\omega)。$$

则方程组化为

$$-\frac{d\varphi_q(\omega)}{d\omega}+i\varphi_q(\omega)=e^{i\omega}m_{q-1}(\omega)+\psi_q(\omega),$$

或

$$\frac{d}{d\omega}[\varphi_q(\omega)e^{-i\omega}]=-m_{q-1}(\omega)-\psi_q(\omega)e^{-i\omega}.$$

此处

$$\varphi_q(\omega)=\sum_k A_k\cos k\omega+\sum_k B_k\sin k\omega,$$

$$\psi_q(\omega)=\sum_k C_k\cos k\omega+\sum_k D_k\sin k\omega,$$

$k=q,\ q-2,\ q-4,\ \cdots,\ 1$；（当 q 为奇数）

$k=q,\ q-2,\ q-4,\ \cdots,\ 0$。（当 q 为偶数）

当 q 为偶数时，$(x-iy)R_q(x,\ y)$为奇次方，$M_{q-1}(x,\ y)$为奇次方，故 $\psi_q(\omega)e^{-i\omega}$ 及 $m_{q-1}(\omega)$没有常数项。此时可取 $m_{q-1}=0$ 即$M_{q-1}=0$，并由此解出

$$\varphi_q(\omega)=-e^{i\omega}\int_0^\omega\psi_q(\omega)e^{-i\omega}d\omega$$

为三角多项式。

当 q 为奇数，则$(x-iy)\ R_q(x,\ y)$及 $M_{q-1}(x,\ y)$ 为偶次齐次式，

$$\psi_q(\omega)c^{-i\omega}=C_0+(\ \omega\text{的三角多项式}),$$

故可取 $m_{q-1}(\omega)=-C_0$，即 $M_{q-1}=-C_0(x^2+y^2)^{\frac{q-1}{2}}$。由此可以求出

$$\varphi_q(\omega)=e^{i\omega}\int_0^\omega[C_0-\psi_q(\omega)e^{-i\omega}]d\omega.$$

这样便可以将 $\varphi_q(\omega)$及 $m_{q-1}(\omega)$唯一地决定下来，从而可以得到

$$\Phi=(x+iy)+F_2(x,y)+F_3(x,y)+\cdots,\tag{3.8}$$

$$M=(-i)+C_2(x^2+y^2)+C_4(x^2+y^2)^2+\cdots,\tag{3.9}$$

使得

$$\frac{d\Phi}{dt}=M\Phi.$$

取共轭方程，则有

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dt}=\bar{M}\,\bar{\Phi},$$

以及

$$\frac{d}{dt}(\Phi\bar{\Phi})=(M+\bar{M})\Phi\bar{\Phi}$$

$$=(2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}(C_{2k})(x^2+y^2)^k)\Phi\bar{\Phi}. \qquad (3.10)$$

由此可见，当 $\mathrm{Re}(C_{2k})\equiv 0$, $(k=1, 2, 3, \cdots)$，则有

$$\frac{d}{dt}(\Phi\bar{\Phi})=0.$$

这时得到中心。

如果 $\mathrm{Re}(C_{2k})$不全为零，设第一个不为零的是 $\mathrm{Re}(C_{2k})$，则这个焦点的阶即为 k.

算例如下：

$$\frac{dx}{dt}=-y+lx^2+mxy+y^2, \qquad \frac{dy}{dt}=x(1+ax+by)$$

有

$$-C_2=\frac{1}{24}\{m(1+l)-a(b+2l)\}$$

$$+\frac{i}{24}\{ma-m^2-10a^2+5bl-b^2-4l^2+b-10l-10\},$$

则

$$\mathrm{Re}(C_2)=-\frac{1}{24}\{m(1+l)-a(b+2l)\}.$$

下一步可以再向前进一步，即要求两个函数

$$\Phi\equiv(x+iy)+F_2(x,y)+F_3(x,y)+\cdots,$$

$$M\equiv(-i)+C_2(\Phi\bar{\Phi})+C_4(\Phi\bar{\Phi})^2+\cdots,$$

使得

$$\frac{d\Phi}{dt}=M\Phi.$$

这是可能的，只须注意到$\Phi\bar{\Phi}==x^2+y^2+\cdots$，即可依次决定$F_2$；$F_3$，$C_2$；$F_4$；$F_5$，$C_4$；$\cdots$。

由此即有

$$\frac{d\Phi}{dt}=\{-i+C_2(\Phi\bar{\Phi})+C_4(\Phi\bar{\Phi})^2+\cdots\}\Phi,$$

及

$$\frac{d\bar{\Phi}}{dt}=\{i+\bar{C}_2(\Phi\bar{\Phi})+\bar{C}_4(\Phi\bar{\Phi})^2+\cdots\}\bar{\Phi}.$$

由此即有

$$\frac{d}{dt}(\Phi\bar{\Phi})=2\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}(C_{2k})\ (\Phi\bar{\Phi})^k\}(\Phi\bar{\Phi}),$$

及

$$\frac{d}{dt}\ln(\Phi/\bar{\Phi})=2i\{-1+\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Im}(C_{2k})(\Phi\bar{\Phi})^k\}.$$

消去dt得到

$$\frac{d(\Phi\bar{\Phi})}{d\ln(\Phi/\bar{\Phi})}=i(\Phi\bar{\Phi})\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}(C_{2k})(\Phi\bar{\Phi})^k}{1-\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Im}(C_{2k})(\Phi\bar{\Phi})^k}.$$

当$\mathrm{Re}(C_{2k})$不全为零，第一个不为零之数k，有

$$\frac{d(\Phi\bar{\Phi})}{d\ln(\Phi/\bar{\Phi})}=i(\Phi\bar{\Phi})^{k+1}\mathrm{Re}(C_{2k})\frac{1+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Re}(C_{2\,k+l})}{\mathrm{Re}(C_{2k})}(\Phi\bar{\Phi})^l\right)}{1-\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{Im}(C_{2l})(\Phi\bar{\Phi})^l}$$

或

$$i\mathrm{Re}(C_{2k})d\ln(\Phi/\bar{\Phi})$$

$$=\{1+d_1(\Phi\bar{\Phi})+d_2(\Phi\bar{\Phi})^2+\cdots\}\frac{d(\Phi\bar{\Phi})}{(\Phi\bar{\Phi})^{k+1}}.$$

积分后可有

$$\frac{-1}{k(\Phi\bar{\Phi})^k}-\frac{d_1}{(k-1)(\Phi\bar{\Phi})^{k-1}}\cdots-\frac{d_{k-1}}{(\Phi\bar{\Phi})}+d_k\ln(\Phi\bar{\Phi})$$

$$+d_{k+1}(\Phi\bar{\Phi})+d_{k+2}\frac{(\Phi\bar{\Phi})^2}{2}\cdots=C\ln[\Phi/\bar{\Phi}]^{iRe(C_{2k})}.$$

由此可以总结为

定理 3.1 对于实系统的 k 阶焦点($k\geqslant 1$)，在焦点附近的解析表达形式可以写成下面的典型形式

$$(\Phi\bar{\Phi})^{d_k}(\Phi/\bar{\Phi})^{-iRe\,C_{2k}}\exp\left\{-\frac{1}{k(\Phi\bar{\Phi})^k}\left[1+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{k}{k-l}d_l(\Phi\bar{\Phi})^l\right]\right\}$$

$$=C\exp\left\{\sum_{l\geq k+1}\frac{d_l}{k-l}(\Phi\bar{\Phi})^{l-k}\right\}=C(1+\cdots). \quad (3.11)$$

方程右方在奇点附近解析，C 为任意常数。

注意，这里不需要展到无限项，只要算到 d_k 及 C_{2k} 即可。

这里 d_k 是 C_{2l} 的函数，$1\leqslant l\leqslant 2k$。具体计算，由关系

$$\frac{1-\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{Im}(C_{2l})(\Phi\bar{\Phi})^l}{1+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{Re}(C_{2\,k+l})}{\mathrm{Re}(C_{2k})}\right)(\Phi\bar{\Phi})^l}=1+\sum_{l=1}^{\infty}d_l(\Phi\bar{\Phi})^l$$

求出。$k\geqslant 1$。

当 $\mathrm{Re}(C_2)\neq 0$，有 $d_1=-\mathrm{Im}(C_2)-\mathrm{Re}(C_4)/\mathrm{Re}(C_2)$。

当 $\mathrm{Re}(C_2)=0$，$\mathrm{Re}(C_4)\neq 0$，有

$$d_2=-\mathrm{Im}(C_4)+\mathrm{Im}(C_2)\frac{\mathrm{Re}(C_6)}{\mathrm{Re}(C_4)}+\left(\frac{\mathrm{Re}(C_6)}{\mathrm{Re}(C_4)}\right)^2-\frac{\mathrm{Re}(C_8)}{\mathrm{Re}(C_4)}.$$

一般地，当 $\mathrm{Re}(C_2)=\cdots=\mathrm{Re}(C_{2\,k-1)})=0$，$\mathrm{Re}(C_{2k})\neq 0$，有

$$d_k=-\mathrm{Im}(C_{2k})+\cdots-\frac{\mathrm{Re}(C_{4k})}{\mathrm{Re}(C_{2k})}.$$

这里可见，d_k 涉及 $\mathrm{Re}(C_{4k})$ 及 $\mathrm{Im}(C_{2k})$。

d_k 之值是否为零是很重要的。当 $d_k=0$，则高阶焦点外不能再有环收缩到它，即阶数不能再增加。而当 $d_k\neq 0$，则有可能增加阶数。这将在下一篇加以研究。下面举几个例来说明。

例 1 $\dfrac{dx}{dt}=y+x(x^2+y^2),\qquad \dfrac{dy}{dt}=-x+y(x^2+y^2).$

则有 $\Phi=x+iy,\qquad M=-i+\Phi\bar{\Phi}.$

$$k=1,\qquad C_2=1,\qquad C_4=0,\qquad d_1=0.$$

这个高阶焦点外无环，不能升阶。

例 2
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+x(x^2+y^2)(x^2+y^2-\delta^2),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-x+y(x^2+y^2)(x^2+y^2-\delta^2),\quad \delta^2>0.\end{cases}$$

则有 $\Phi=x+iy,\ M=-i-\delta^2(\Phi\bar{\Phi})+(\Phi\bar{\Phi})^2,$

$$k=1,\qquad C_2=-\delta^2,\qquad C_4=1,\qquad d_1=\frac{1}{\delta^2}\neq 0.$$

这时在高阶焦点外有环，奇点有可能升阶。

注意，以 $+\delta^2$ 代 $-\delta^2$ 则系统没有实环；因此，由可能性变为现实性还要看其他条件。命 $\delta=0$，有

例 3 $\dfrac{dx}{dt}=y+x(x^2+y^2)^2,\qquad \dfrac{dy}{dt}=-x+y(x^2+y^2)^2.$

则有 $\Phi=x+iy,\qquad M=-i+(\Phi\bar{\Phi})^2.$

$$k=2,\qquad C_2=0,\qquad C_4=1,\qquad C_6=0,\qquad C_8=0,\qquad d_2=0.$$

奇点升阶了，但奇点外无环。

定理 3.2 对于实系统的 k 阶焦点($k\geqslant 1$)，在奇点附近的积分曲线均过奇点.

证明 由定理 3.1 知 $\Phi=0$ 及 $\bar{\Phi}=0$ 均过奇点。当 $\Phi\neq 0$，$\bar{\Phi}\neq 0$，则由(3.11)中的 $C\neq 0,\infty$，可设 $\Phi=\mathrm{R}e^{i\varphi}$，则 $\bar{\Phi}=\mathrm{R}e^{-i\varphi}$. (3.11)化为

$$R^{2d_k}\exp\{2\mathrm{Re}(C_{2k})\psi\}\exp\left\{-\frac{1}{kR^{2k}}\left[1+\sum_{l=1}^{k-1}\left(\frac{k}{k-l}\right)d_l R^{2l}\right]\right\}$$
$$=C\exp\left\{\sum_{l\geq k+1}\left(\frac{d_l}{k-l}\right)R^{2(l-k)}\right\}.$$

给定 R，则因 $\mathrm{Re}(C_{2k})\neq 0$，故 ψ 唯一决定。现当 $|x|+|y|\to 0$，则 $R\to 0$。由此有

$$R^{2d_k}\exp\left\{-\frac{1}{kR^{2k}}\left[1+\sum_{l=1}^{k-1}\left(\frac{k}{k-l}\right)d_l R^{2l}\right]\right\}\to 0^+,\ (k\geqslant 1),$$

$\exp\left\{\sum_{l\geq k+1}\left(\frac{d_l}{k-l}\right)R^{2(l-k)}\right\}\to 1$. 故 $\exp\{2\mathrm{Re}(C_{2k})\psi\}\to\infty$，即 $2\mathrm{Re}(C_{2k})\psi\to\infty$。故积分曲线过奇点。定理 3.2 证毕。

注意，要研究积分曲面，则应将$(x,\ y)$换为复数$(w,\ z)$。这时 Φ，M，可改为

$$\Phi_1=(w+iz)+F_2(w,\ z)+F_3(w,\ z)+\cdots,$$
$$M_1=-i+C_2(w^2+z^2)+C_4(w^2+z^2)^2+\cdots.$$

而 $\bar{\Phi}$，$\bar{M}$，则应相应地改为

$$\Phi_2=(w-iz)+\tilde{F}_2(w,\ z)+\tilde{F}_3(w,\ z)+\cdots,$$
$$M_2=i+\bar{C}_2(w^2+z^2)+\bar{C}_4(w^2+z^2)^2+\cdots.$$

这里 $\tilde{F}_j(w,\ z)$表示 $F_j(w,z)$中的系数改为共轭复数，但 w,z 不改为共轭的$\bar{w}$，$\bar{z}$。由于 F_j 是多项式，也可写成

$$\tilde{F}_j(w,\ z)=\overline{F_j(\bar{w},\ \bar{z})}.$$

这样，对于定理 3.1 也可在复域中表述为

定理 3.3 对于实系统的 k 阶焦点$(k\geqslant 1)$，在焦点附近的复域的解析表达形式可以写成下面的典型形式

$$(\Phi\tilde{\Phi})^{d_k}\cdot(\Phi/\tilde{\Phi})^{-i\mathrm{Re}(C_{2k})}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{k(\Phi\tilde{\Phi})^k}\left[1+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{k}{k-l}d_l(\Phi\tilde{\Phi})^l\right]\right\}$$
$$=C\cdot\exp\left\{\sum_{l\geq k+1}\frac{d_l}{k-l}(\Phi\tilde{\Phi})^{l-k}\right\}=C(1+\cdots).\qquad(3.12)$$

方程右方在奇点附近解析。这里

$$\Phi=\Phi(w,\ z),\qquad \widetilde{\Phi}=\overline{\Phi(\overline{w},\ \overline{z})}.$$

$$\Phi=w+iz+\cdots,\qquad \widetilde{\Phi}=w-iz+\cdots.$$

由于 $\left.\dfrac{\partial(\Phi,\ \widetilde{\Phi})}{\partial(w,\ z)}\right|_{w=z=0}=\begin{vmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{vmatrix}=-2i\neq 0$。因此，在奇点附近也可将$\Phi$及$\widetilde{\Phi}$看作两个独立变量来代替$(w,\ z)$。

第四章　奇点的指数

§1. 定　义

在四维空间 $E^4:(u, v, x, y)$ 中的任一点 $P_0(u_0, v_0, x_0, y_0)$ 如果不是奇点，则有一个积分曲面经过它；这个曲面在这点有一张切平面，以 $\Pi(P_0)$ 记它；在 $\Pi(P_0)$ 上过 P_0 任取一切向量，以 $\vec{T}(P_0)$ 记．

要求 $\vec{T}(P_0)$ 如此定义，使它是 P_0 的连续函数，奇点处除外，则得到一个连续向量场，并利用它来定义孤立奇点 P 的指数 $I(P)$。

$\vec{T}(P_0)$ 可任选，只要在奇点外连续即可，$I(P)$ 均为同一值，这已在 1937 年由恢特勒(H. Whitney)所证明。

对于由常微分方程所定义的积分曲面，还可更进一步具体化，例如一般地有

$$\frac{dw}{dT} = W(w,\ z),\quad \frac{dz}{dT} = Z(w,\ z). \tag{4.1}$$

取 $dT = e^{i\theta} dr$，$w = u + iv$，$z = x + iy$，则当 θ 固定时，即可得到

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dr} &= \mathrm{Re}\{e^{i\theta} W(w,\ z)\},\\
\frac{dv}{dr} &= \mathrm{Im}\{e^{i\theta} W(w,\ z)\},\\
\frac{dx}{dr} &= \mathrm{Re}\{e^{i\theta} Z(w,\ z)\},\\
\frac{dy}{dr} &= \mathrm{Im}\{e^{i\theta} Z(w,\ z)\}.
\end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

对这个实方程组，便可用实定性理论的奇点定义了。

§2. 指数定理

定理 4.1 对线性方程组

$$\frac{dw}{dT}=\alpha w+\beta z,\quad \frac{dz}{dT}=\gamma w+\delta z,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}\neq 0.$$

则原点 O 的指数为

$$I(O)=+1.$$

证明 一般情形可化为两类分别加以验证。

(i) $\mathrm{Im}(\Lambda)=b\neq 0$.

$$\frac{dw}{dT}=\lambda_1 w,\quad \frac{dz}{dT}=\lambda_2 z,$$

$$\lambda_1=a_1+ib_1,\ \lambda_2=a_2+ib_2,$$

$$|\lambda_1\lambda_2|\neq 0.$$

则取 $dT=dt$ 为实变量，即有实方程组

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=a_1u-b_1v, \\ \dfrac{dv}{dt}=b_1u+a_1v, \\ \dfrac{dx}{dt}= \qquad\qquad a_2x-b_2y, \\ \dfrac{dy}{dt}= \qquad\qquad b_2x+a_2y. \end{cases}$$

行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}=(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)=$$
$$|\lambda_1\lambda_2|^2=|q|^2>0.$$

故知指数

$$I(O)=+1.$$

(ii) $\operatorname{Im}(\Lambda)=b=0$。方程可化为实 λ_1，λ_2 的形式：

$$\frac{dw}{dT}=\lambda_1 w,\quad \frac{dz}{dT}=\lambda_2 z\ .$$

取 $dT=dt$ 为实变数，则有

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\lambda_1 u,\\ \dfrac{dv}{dt}=\quad\lambda_1 v,\\ \dfrac{dx}{dt}=\quad\quad\lambda_2 x,\\ \dfrac{dy}{dt}=\quad\quad\quad\lambda_2 y.\end{cases}$$

行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_1^2\lambda_2^2=q^2>0.$$

故 $I(O)=+1$。

还有一种特例是经非奇异线性变换，可化为：

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dT}=w+z\ ,\\ \dfrac{dz}{dT}=\quad z\ .\end{cases}$$

则取 $dT=dt$ 为实变量，即有

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=u\quad+x\quad,\\ \dfrac{dv}{dt}=\quad v\quad+y\ ,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & x & , \\ \dfrac{dy}{dt} = & & y & . \end{cases}$$

则行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

故也有

$$I(O) = +1.$$

总之， $q \neq 0$， 则 $I(O) = +1$。定理 4.1 证毕。

定理 4.2 对于有非线性的项时，只要一次项的 $q \neq 0$，则奇点的指数也为 $+1$。

证明 指数在小扰动下，只要不破坏向量场的连续性，则它们是不变量，故仍保持 $+1$ 之值。

这里可以看出，利用指数不能区分复域奇点的拓扑类型。但是另一方面则有一个很有用的性质，这就是研究高次奇点时，可用来决定这个奇点是几个奇点汇合而成的，这是实域定性理论中没有判定过的问题。

§3. 奇点的全局分布

对于复数平面，加上无限远点，便得到一个二维球面 S^2. 故 w 平面加上 $\frac{1}{w} = 0$ 点和 z 平面加上 $\frac{1}{z} = 0$ 时各得一个 S^2。两个组合即得一个四维流形

$$M^4 = S^2 \times S^2.$$

由庞加莱的组合拓扑结果有示性数

$$\chi(M^4)=\sum_i I(P_i),$$

P_i 为奇点。

已知将两 S^2 作三角分割，得两个三角锥 $ABCD$ 及 $EFGH$。则它们的组合如下：

$$\alpha_0=4\times4=16,$$

$$\alpha_1=4\times6+6\times4=48,$$

$$\alpha_2=6\times6+4\times4+4\times4=68,$$

$$\alpha_3=4\times6+6\times4=48,$$

$$\alpha_4=4\times4=16.$$

故
$$\chi(M^4)=16-48+68-48+16=4.$$

定理 4.3 将全局看作 $S^2\times S^2$ 处理，则

$$\sum_i I(P_i)=4.$$

例 1 $\dfrac{dw}{dT}=w(w-1)$，$\dfrac{dz}{dT}=z(z-1)$。

有限处有四个奇点，即

$$(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1).$$

每个奇点的指数

$$I(P)=1.$$

对于无限远处，取 $\xi=\dfrac{1}{w}$，则

$$\frac{d\xi}{dT}=\xi-1,$$

故 $\xi=0$ 不出现奇点。同理，取 $\eta=\dfrac{1}{z}$，则

$$\frac{d\eta}{dT}=\eta-1.$$

故 $\eta=0$ 不出现奇点。因此无限远处不存在奇点。总结可见，只

有四个有限奇点，指数均为+1。故

$$\sum_i I(P_i)=4.$$

例 2 $\frac{dw}{dT}=w$，$\frac{dz}{dT}=z$。

有限处有一个奇点$w=z=0$，指数为+1。对无限远处，取$w=\frac{1}{\xi}$，则

$$\frac{d\xi}{dT}=-\xi,$$

故$\xi=0$，$z=0$为一个奇点，并且指数为+1。

同理取$z=\frac{1}{\eta}$，则有

$$\frac{d\eta}{dT}=-\eta.$$

故在$w=0$，$\eta=0$及$\xi=0$，$\eta=0$处均为奇点，并且指数均为+1。此外没有其他奇点，故亦得

$$\sum_i I(P_i)=4.$$

对于更复杂的情形，当奇点的个数多于4个时，将出现$I(P)<0$的奇点，情况比较复杂。为了研究的方便，我们在下一节将采取另一种处理法，来研究全局情形。

§4. 庞加莱型的无限远处理

平行于实域中的方法，对于方程组

$$\frac{dw}{dT}=W_n(w, z),\quad \frac{dz}{dT}=Z_n(w, z). \tag{4.3}$$

这里$W_n(w, z)$及$Z_n(w, z)$是(w, z)不高于n次的多项式。引入(ξ, η)：

$$w=\frac{1}{\xi},\qquad z=\frac{\eta}{\xi}. \tag{4.4}$$

并且定义

$$A(\xi,\ \eta)=\xi^n W_n\left(\frac{1}{\xi},\ \frac{\eta}{\xi}\right),$$

$$B(\xi,\ \eta)=\xi^n Z_n\left(\frac{1}{\xi},\ \frac{\eta}{\xi}\right),\tag{4.5}$$

$$dT=\xi^n d\tau$$

则方程组(4.3)化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{d\tau}=-\xi A(\xi,\ \eta),\\ \dfrac{d\eta}{d\tau}=B(\xi,\eta)-\eta A(\xi,\eta).\end{cases}\tag{4.6}$$

这时，无限远奇点的$(\xi,\ \eta)$满足

$$\xi=0,\quad B(0,\ \eta)-\eta A(0,\ \eta)=0.\tag{4.7}$$

(4.7)一般为η的$(n+1)$次代数方程，故有$(n+1)$个根$\eta=\eta_1$，$\eta_2,\cdots,\ \eta_{n+1}$。则无限远处的奇点即为：

$$(\xi,\ \eta)=(0,\ \eta_j),\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1.$$

当η_j互不相等时，它们是$(n+1)$个普通的奇点。再加上有限处一般有n^2个普通奇点，即$W_n(w,\ z)=0$与$Z_n(w,\ z)=0$的公根，因此，有

定理 4.4 对方程组(4.3)用庞卡莱型办法处理无限远点，则一般有

$$\sum_i I(P_i)=n^2+n+1.$$

例如$n=2$，则一般有7个奇点，4个有限处奇点和3个无限远奇点。这方面将在第四篇中详细探讨。

现在来证一个后面将用到的重要结果，即

定理 4.5 利用庞卡莱处理法，则当无限远奇点为结点型时，高次项不影响奇点附近的积分曲面的拓扑结构。

证明 设(4.6)在$\xi=0$，$\eta=\eta_j$为一结点型，则(4.6)的第

一式的右方，在 $\xi=0$，$\eta=\eta_i$ 附近展开时有

$$-\xi A(\xi,\eta)$$

$$=-\xi\left\{A(0,\ \eta_i)+\frac{\partial A}{\partial \xi}\bigg|_{(0,\eta_i)}\xi+\frac{\partial A}{\partial \eta}\bigg|_{(0,\eta_i)}(\eta-\eta_i)+\cdots\right\},$$

故在$(0,\ \eta_i)$点有一个特征根

$$\lambda=-A(0,\ \eta_i).$$

因是结点型，$\lambda\neq0$，故 $A(0,\ \eta_i)\neq0$。这样

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{B(\xi,\eta)-\eta A(\xi,\eta)}{-\xi A(\xi,\eta)}=\frac{B(\xi,\eta)-\eta A(\xi,\eta)}{\xi\{-A(0,\eta_i)+\cdots\}}$$

$$=\frac{1}{\xi}\left\{\frac{B(\xi,\eta)}{-A(0,\eta_i)}+\eta\frac{A(\xi,\ \eta)}{A(0,\ \eta_i)}\right\}\left\{1+\cdots\right\}$$

$$=\frac{\gamma\xi+\delta(\eta-\eta_i)+\cdots}{\xi}.$$

这样，就排除了结点型在 $A=-1$ 时的那种例外的可能性，因此，高次项不影响拓扑结构。定理 4.5 证毕。

第 三 篇

复域定性理论中奇点与全局联系的理论

第一章 有根定理

§1. 两个引理

设 $W(w, z)$ 及 $Z(w, z)$ 为 w, z 的实系数多项式，并且 $W(w, z)=0$ 及 $Z(w, z)=0$ 只有有限个公根组(w, z)。

以下研究复域方程组

$$\frac{dw}{dT}=W(w, z), \quad \frac{dz}{dT}=Z(w, z) \tag{1.1}$$

所定义的积分曲面族

$$\mathscr{F}(w, z)=\text{const.} \tag{1.2}$$

取

$$dT=e^{i\theta}dr \tag{1.3}$$

此处 θ 及 r 为实数。(1.1)化为方程组

$$\frac{dw}{dr}=e^{i\theta}W(w, z), \quad \frac{dz}{dr}=e^{i\theta}Z(w, z), \tag{1.4}$$

及其共轭方程组

$$\frac{d\overline{w}}{dr}=e^{-i\theta}\,\overline{W(w, z)}, \quad \frac{d\overline{z}}{dr}=e^{-i\theta}\,\overline{Z(w, z)} \tag{1.4$'$}$$

在 $W(w,z)$ 及 $Z(w,z)$ 为实系数多项式的条件下，

$$\overline{W(w,z)}=W(\overline{w},\overline{z}),\quad \overline{Z(w,z)}=Z(\overline{w},\overline{z}).$$

现在定义两个复变量的实值函数

$$J(w,z)=w\overline{w}+z\overline{z} \tag{1.5}$$

及

$$\begin{aligned}K(w,z)&=W(w,z)\overline{W(w,z)}+Z(w,z)\overline{Z(w,z)}\\&=W(w,z)W(\overline{w},\overline{z})+Z(w,z)Z(\overline{w},\overline{z}).\end{aligned} \tag{1.6}$$

当 θ 取定，只变化 r 时有

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dr}&=w\frac{d\overline{w}}{dr}+\overline{w}\frac{dw}{dr}+z\frac{d\overline{z}}{dr}+\overline{z}\frac{dz}{dr}\\&=e^{i\theta}(\overline{w}W(w,z)+\overline{z}Z(w,z))+e^{-i\theta}(wW(\overline{w},\overline{z})+zZ(\overline{w},\overline{z}))\\&=2R_1(w,z)\cos(\theta+\varphi_1(w,z)).\end{aligned} \tag{1.7}$$

其中

$$\overline{w}W(w,z)+\overline{z}Z(w,z)=R_1(w,z)e^{i\varphi_1(w,z)}, \tag{1.8}$$

$R_1(w,z)\geqslant 0$，$\varphi_1(w,z)$为实值函数$(\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

当 θ 取定，将(1.7)对 r 再微分一次，则有

$$\begin{aligned}\frac{d^2J}{dr^2}&=\left(\frac{dw}{dr}\frac{\partial}{\partial w}+\frac{d\overline{w}}{dr}\frac{\partial}{\partial\overline{w}}+\frac{dz}{dr}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{d\overline{z}}{dr}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\right)\left(\frac{dJ}{dr}\right)\\&=e^{i\theta}\left\{\frac{d\overline{w}}{dr}W(w,z)+\overline{w}\frac{\partial W(w,z)}{\partial w}\frac{dw}{dr}+\overline{w}\frac{\partial Z(w,z)}{\partial z}\frac{dz}{dr}\right.\\&\quad\left.+\frac{d\overline{z}}{dr}Z(w,z)+\overline{z}\frac{\partial Z(w,z)}{\partial w}\frac{dw}{dr}+\overline{z}\frac{\partial Z(w,z)}{\partial z}\frac{dz}{dr}\right\}\\&\quad+e^{-i\theta}\left\{\frac{dw}{dr}W(\overline{w},\overline{z})+w\frac{\partial W(\overline{w},\overline{z})}{\partial\overline{w}}\frac{d\overline{w}}{dr}+w\frac{\partial W(\overline{w},\overline{z})}{\partial\overline{z}}\frac{d\overline{z}}{dr}\right.\\&\quad\left.+\frac{dz}{dr}Z(\overline{w},\overline{z})+z\frac{\partial Z(\overline{w},\overline{z})}{\partial\overline{w}}\frac{d\overline{w}}{dr}+z\frac{\partial Z(\overline{w},\overline{z})}{\partial\overline{z}}\frac{d\overline{z}}{dr}\right\}\\&=2\{W(w,z)W(\overline{w},\overline{z})+Z(w,z)Z(\overline{w},\overline{z})\}\\&\quad+e^{2i\theta}\left\{\overline{w}W(w,z)\frac{\partial W(w,z)}{\partial w}+\overline{z}W(w,z)\frac{\partial Z(w,z)}{\partial w}\right.\end{aligned}$$

$$+\overline{w}Z(w,z)\frac{\partial W(w,z)}{\partial z}+\overline{z}Z(w,z)\frac{\partial Z(w,z)}{\partial z}\Big\}$$

$$+e^{-2i\theta}\Big\{wW(\overline{w},\overline{z})\frac{\partial W(\overline{w},\overline{z})}{\partial\overline{w}}+zW(\overline{w},\overline{z})\frac{\partial Z(\overline{w},\overline{z})}{\partial\overline{w}}$$

$$+wZ(\overline{w},\overline{z})\frac{\partial W(\overline{w},\overline{z})}{\partial\overline{z}}+zZ(\overline{w},\overline{z})\frac{\partial Z(\overline{w},\overline{z})}{\partial\overline{z}}\Big\}$$

$$=2K(w,z)+2R_2(w,z)\cos(2\theta+\varphi_2(w,z)) \qquad (1.9)$$

此处

$$\overline{w}W(w,z)\frac{\partial W(w,z)}{\partial w}+\overline{z}W(w,z)\frac{\partial Z(w,z)}{\partial w}$$

$$+\overline{w}Z(w,z)\frac{\partial W(w,z)}{\partial z}+\overline{z}Z(w,z)\frac{\partial Z(w,z)}{\partial z}$$

$$=R_2(w,z)e^{i\varphi_2(w,z)}. \qquad (1.10)$$

$R_2(w,z)\geqslant 0$，$\varphi_2(w,z)$为实值函数（$\mathrm{mod}\ 2\pi$）。

引理 1 对于任何一点(w_0, z_0)，如果$K(w_0, z_0)\neq 0$，则必存在一个方向 $\theta=\theta_0(w_0, z_0)$，及一个正数 $r=r_0(w_0, z_0)>0$，使得，当取定 $\theta=\theta_0(w_0, z_0)$，由点$(w_0, z_0)$沿(1.1) 定义的积分曲面 $\mathscr{F}(w, z)=\mathscr{F}(w_0, z_0)$ 将 r 由 0 变到 $r=r_0(w_0, z_0)$ 时，则由(1.1)所定义的点为(w_1, z_1)，有关系

$$J(w_1, z_1)>J(w_0, z_0). \qquad (1.11)$$

证明 分三种情形加以证明：

(i) $R_1(w_0, z_0)\neq 0$；

(ii) $R_1(w_0, z_0)=0$，$R_2(w_0, z_0)\neq 0$；

(iii) $R_1(w_0, z_0)=0$，$R_2(w_0, z_0)=0$，$K(w_0, z_0)\neq 0$。

以下逐个加以验证。

(i) $R_1(w_0, z_0)\neq 0$，故 $R_1(w_0, z_0)>0$。由于 $R_1(w,z)$是(w,z)的连续函数，因此对(w_0,z_0)点存在一个邻域 $U_1(w_0,z_0)$，使当$(w, z)\in U_1(w_0, z_0)$，则有

$$R_1(w,z)\geqslant\frac{1}{2}R_1(w_0,\ z_0)>0.$$

由于 $U_1(w_0,z_0)$中，$R_1(w,z)>0$，故 $\varphi_1(w,z)$在 $U_1(w_0,z_0)$中是确定的(mod 2π)，并且是实值连续函数。因此，可以在 $U_1(w_0,z_0)$中取(w_0,z_0)的一个邻域 $U_2(w_0,z_0)$，$(w_0,z_0)\in U_2(w_0,z_0)\subset U_1(w_0,z_0)$，使当$(w,z)\in U_2(w_0,z_0)$，则

$$|\varphi_1(w,z)-\varphi_1(w_0,z_0)|\leqslant\frac{\pi}{3}$$

下面取定 $\theta=\theta_0(w_0,z_0)=-\varphi_1(w_0,z_0)$，则可取到 $r_0=r_0(w_0,z_0)>0$ 如此小，使得沿 $\theta=\theta_0(w_0,z_0)$，由(w_0,z_0)出发，r 由 0 积分到 $r_0=r_0(w_0,z_0)$，积分曲线段全在 $U_2(w_0,z_0)$之内。这样，固定 $\theta=\theta_0(w_0,z_0)$，在 $0\leqslant r\leqslant r_0(w_0,z_0)$ 中有 $J(r)=J(w(r),z(r))$及

$$\frac{dJ(r)}{dr}=2R_1(w(r),z(r))\cos(\theta_0(w_0,z_0)+\varphi_1(w(r),z(r)))$$

$$\geqslant2\left(\frac{R_1(w_0,z_0)}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}R_1(w_0,z_0)>0.$$

这是因为

$$\left|\theta_0(w_0,z_0)+\varphi_1(w(r),z(r))\right|$$

$$=\left|-\varphi_1(w_0,z_0)+\varphi_1(w(r),z(r))\right|\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

由此可知

$$J(w_1,z_1)-J(w_0,z_0)=\int_0^{r_0}\frac{dJ(r)}{dr}dr\geqslant\frac{1}{2}R_1(w_0,z_0)r_0(w_0,z_0)$$

$$>0.$$

第一种情形证毕。

(ii) $R_1(w_0,z_0)=0$，$R_2(w_0,z_0)\neq0$。

这时 $\varphi_1(w_0,z_0)$不能确定。但由于 $R_2(w_0,z_0)\neq0$，故$R_2(w_0,z_0)>0$，故 $\varphi_2(w_0,z_0)$是确定的(mod 2π)。

由于 $R_1(w,z)$ 及 $R_2(w,z)$ 是 (w,z) 的实值非负的连续函数，则可取得 (w_0,z_0) 的一个邻域 $U_1(w_0,z_0)$，使得当 $(w,z)\in U_1(w_0,z_0)$，则有

$$R_1(w,z)<\frac{1}{4}R_2(w_0,z_0)<\frac{1}{2}R_2(w_0,z_0)<R_2(w,z).$$

在 $U_1(w_0,z_0)$ 中，$R_2(w,z)>0$，故 $\varphi_2(w,z)$ 是确定的 $(\text{mod}\,2\pi)$。以下取定

$$\theta=\theta_0(w_0,z_0)=-\frac{1}{2}\varphi_2(w_0,z_0).$$

在 $U_1(w_0,z_0)$ 中，由于 $\varphi_2(w,z)$ 是 (w,z) 的实值连续函数，因此，可以取得 (w_0,z_0) 的又一个邻域 $U_2(w_0,z_0)$，

$$(w_0,z_0)\in U_2(w_0,z_0)\subset U_1(w_0,z_0),$$

使当 $(w,z)\in U_2(w_0,z_0)$，则

$$|\varphi_2(w,z)-\varphi_2(w_0,z_0)|\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

这时，可以取到 $r_0=r_0(w_0,z_0)>0$ 如此小，使当取定 $\theta=\theta_0(w_0,z_0)$，$0\leqslant r\leqslant r_0(w_0,z_0)$，则由 (w_0,z_0) 出发的积分曲线上的 (w,z) 点均在 $U_2(w_0,z_0)$ 之内。

这时，$J=J(w,z)=J(w(r),\ z(r))$ 是 r 的实函数，由泰勒展式可有

$$\begin{aligned}
J(w(r_0),z(r_0))-J(w_0,z_0)&=J(r)-J(0)\\
&=r_0\frac{dJ}{dr}\Big|_{r=0}+\frac{1}{2!}r_0^2\frac{d^2J}{dr^2}\Big|_{r=\eta r_0}\qquad(0<\eta<1)\\
&=0+\frac{1}{2!}r_0^2\Big[2K(w(r),\ z(r))\\
&\qquad+2R_2(w(r),z(r))\cos(2\theta_0(w_0,z_0)+\\
&\qquad+\varphi_2(w(r),\ z(r))\Big]_{r=\eta r_0}
\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{1}{2!} r_0^2 \Big[2R_2(w(r), z(r)) \cdot$$

$$\cdot \cos(-\varphi_2(w_0, z_0) + \varphi_2(w(r), z(r))) \Big]_{r=\eta r_0}$$

$$\geqslant \frac{1}{2!} r_0^2 \Big[2\left(\frac{R_2(w_0, z_0)}{2}\right)\frac{1}{2} \Big] = \frac{(r_0(w_0, z_0))^2}{4} R_2(w_0, z_0) > 0.$$

第二种情形验证毕。

(iii) $R_1(w_0, z_0) = 0, R_2(w_0, z_0) = 0, K(w_0, z_0) \neq 0$。

这时 $\varphi_1(w_0,\ z_0)$ 及 $\varphi_2(w_0,\ z_0)$ 均不确定。

任取 θ，例如取定 $\theta = 0$。

由于 $R_2(w,\ z)$ 及 $K(w,\ z)$ 是 $(w,\ z)$ 的连续函数，故可取得 $(w_0,\ z_0)$ 之一个邻域 $U_1(w_0,\ z_0)$， 使当 $(w,\ z) \in U_1(w_0,\ z_0)$， 则有

$$R_2(w, z) \leqslant \frac{1}{4} K(w_0, z_0) < \frac{1}{2} K(w_0, z_0) \leqslant K(w, z).$$

固定 $\theta = 0$，则可取得 $r_0 = r_0(w_0, z_0) > 0$，如此小， 使得对于 $0 \leqslant r \leqslant r_0$，由 (w_0, z_0) 出发的积分曲线上的点 $(w,\ z)$ 均在 $U_1(w_0,\ z_0)$ 内。由此可有

$$J(r_0) - J(0) = \frac{1}{2!} r_0^2 \Big[2K(w(r), z(r)) +$$

$$+ 2R_2(w(r), z(r)) \cos(\varphi_2(w(r), z(r))) \Big]_{r=r_0\eta}$$

$$\geqslant \frac{1}{2!} r_0^2 \Big[2\left(\frac{K(w_0, z_0)}{2}\right) - 2\left(\frac{K(w_0, z_0)}{4}\right) \Big]$$

$$= \frac{(r_0(w_0, z_0))^2}{4} K(w_0,\ z_0) > 0.$$

第三种情形证毕。引理 1 证毕。

引理 2 对于任一点 $(w_0,\ z_0)$， 如果 $K(w_0,\ z_0) \neq 0$， 则存在 $(w_0,\ z_0)$ 的一个邻域 $U_0(w_0,\ z_0)$，一个方向 $\theta_0 = \theta_0(w_0,\ z_0)$，一个长度 $r_0 = r_0(w_0,\ z_0) > 0$，及一个正数 $s_0 = s_0(w_0,\ z_0)$，使得

当在 $U_0(w_0, z_0)$中任取一点(w_0', z_0')作为初值，沿 θ_0 方向，积分由 $r=0$ 到 $r=r_0$，到达一点(w_1', z_1')则必有

$$J(w_1', z_1')-J(w_0', z_0')\geqslant\varepsilon_0>0.$$

证明 由引理 I 知，对于(w_0, z_0)必存在 $\theta_0=\theta_0(w_0, z_0)$及 $r_0=r_0(w_0, z_0)>0$，使当由初值(w_0, z_0)出发，沿 θ_0 方向由 $r=0$ 积分到 $r_0=r_0(w_0, z_0)>0$，得一点(w_1, z_1)，有 $J(w_1, z_1)-J(w_0, z_0)>0$。

下面取

$$\varepsilon_0=\varepsilon_0(w_0, z_0)=\frac{1}{3}[J(w_1, z_1)-J(w_0, z_0)].$$

现在固定 $\theta=\theta_0$，$0\leqslant r\leqslant r_0=r_0(w_0, z_0)$。利用解对于初值的连续依赖性，可以取$(w_0, z_0)$的一个邻域 $U_0(w_0, z_0)$如此小，使得 $U_0(w_0, z_0)$的直径平方小于 $\varepsilon_0(w_0, z_0)$，以及由 $U_0(w_0, z_0)$中之点出发，沿 θ_0 方向，r 由 0 积分到 $r_0(w_0, z_0)>0$，所到达之点所形成的集合 $U_1(w_1, z_1)$的直径平方也小于 $\varepsilon_0(w_0, z_0)$。这是可以做到的，因为任取一个 $U(w_0, z_0)$直径平方小于 ε，则在$\overline{U(w_0, z_0)}$上初值到末值的映射是一致连续的，故可以从末值的集合中取出一个子集合 $U_1(w_1, z_1)$使其直径平方小于 ε_0，则 $U_1(w_1, z_1)$的原像即可作为 $U_0(w_0, z_0)$。

由此当$(w_0', z_0')\in U_0(w_0, z_0)$有

$$|w_0'-w_0|^2+|z_0'-z_0|<\varepsilon_0$$

以及其末值

$$|w_1'-w_1|^2+|z_1'-z_1|<\varepsilon_0.$$

现在利用欧氏距离的三角不等式，有

$$\begin{aligned}
J(w_1', z_1')-J(w_0', z_0')&\\
=(J(w_1', z_1')-J(w_1, z_1))&\\
+(J(w_1, z_1)-J(w_0, z_0))&\\
+(J(w_0, z_0)-J(w_0', z_0'))&
\end{aligned}$$

$$\geqslant -(|w_1'-w_1|^2+|z_1'-z_1|^2)+3\varepsilon_0-(|w_0'-w_0|^2$$
$$+|z_0'-z_0|^2)\geqslant -\varepsilon_0+3\varepsilon_0-\varepsilon_0=\varepsilon_0(w_0,z_0).$$

引理证毕。

§2. 有根定理

定理 1.1 设 $W(w,z)$ 及 $Z(w,z)$ 为 (w,z) 之实系数多项式，并且 $W(w,z)=0$ 与 $Z(w,z)=0$ 只有有限组公根 (w,z)。由方程组

$$\frac{dw}{dT}=W(w,z),\quad \frac{dz}{dT}=Z(w,z) \tag{1.1}$$

所定义的积分曲面族

$$\mathscr{F}(w,\ z)=\text{const} \tag{1.2}$$

中任取一积分曲面

$$\mathscr{F}:\mathscr{F}(w,\ z)=c_1,$$

则它或者到达某一有限奇点，或者延伸到∞处，亦即或者 $\mathscr{F}$ 包含一有限奇点，或者无界。

证明 取一个球体

$$M_R:\ w\overline{w}+z\bar{z}\leqslant R.$$

R 如此大，它包含所有有限奇点（即 $W=0$，$Z=0$ 之公根组）在内，并包含 $\mathscr{F}$ 上之某一点在内。设有限个有限奇点为 $P_l(w_l,\ z_l)$，$l=1,\ 2,\ \cdots,\ N$。对每个奇点附近挖去一个小球

$$S_l(\delta):\ |w-w_l|^2+|z-z_l|^2<\delta,\ \delta>0.$$

取 δ 如此小，使 $S_l(\delta)$ 均在 M_R 内部。

现在考虑有界闭集

$$S(R,\ \delta)=M_R-\bigcup_{1\leqslant l\leqslant N}S_l(\delta).$$

由于已除去奇点，故 $S(R,\ \delta)$ 上每一点 $(w_0,\ z_0)$，均有 $K(w_0,\ z_0)\neq 0$。因此，由上节引理 2 知存在一个邻域 $U_0(w_0,z_0)$，一个方向 $\theta=\theta_0(w_0,\ z_0)$，一个距离 $r_0(w_0,\ z_0)$ 及一个小正数 $\varepsilon_0(w_0,$

z_0)，使当初值(w_0', z_0')在$U_0(w_0, z_0)$中时，沿θ_0方向积分r由0到r_0，到达末点(w_1', z_1')有

$$J(w_1', z_1') - J(w_0', z_0') > \varepsilon(w_0, z_0)。$$

这些邻域$U_0(w_0, z_0)$的全体覆盖集合$S(R, \delta)$；$S(R, \delta)$为有界闭集，故可取出有限个这种邻域，记作

$$U_0(Q_1), \ U_0(Q_2), \ \cdots, \ U_0(Q_m)。$$

使得

$$\left[\bigcup_{1 \leq j \leq m} U_0(Q_j)\right] \supset S(R, \delta),$$

取

$$\varepsilon = \min_{1 \leq j \leq m} \varepsilon(Q_j) > 0,$$

则从$S(R, \delta)$内$\mathscr{F} = c_1$上一点出发，每次J至少增加ε，除非$\mathscr{F} = c_1$上有点到达$S(R, \delta)$之边界上。由此，最多经过$\left[\frac{R}{\varepsilon}\right] + 1$步，$\mathscr{F} = c_1$上必有点到达$S(R, \delta)$之边界。

$S(R, \delta)$只有$N+1$个（三维）球面组成的边界，即

$$w\bar{w} + z\bar{z} = R \ \text{及} \ |w - w_l|^2 + |z - z_l|^2 = \delta, \ (l = 1, 2, \cdots, N)。$$

以下将R加大，将δ缩小，即得一系列的集合

$$\left\{S\left(nR, \frac{\delta}{n}\right); \quad n = 1, 2, 3, \cdots\right\},$$

每个集合的边界上至少有$\mathscr{F} = c_1$的一个点；任取一个点，记作$P^{(n)}$，则有一系列的点

$$\{P^{(n)}; \ n = 1, 2, 3, \cdots\}$$

现在将它们分为有限$(N+1)$类，即到达外边界球面的为一类，到达某个(w_l, z_l)为心的内球面的为一类。

无限多个点分为有限$(N+1)$类，故至少有一类中含有∞多个点$P^{(n)}$。

如果某个(w_l, z_l)为心的内球面上有无限多个这种点，则

$$(w_l, z_l) \in \overline{\mathscr{F}}。$$

如果外球面上有无限多个这种点，则$\mathscr{F}$曲面无界。定理 1.1

证毕。

注意 1　这一定理在实域定性理论中没有相应的结果，这只要从下面的反例即可看出。反例

$$\frac{dx}{dt}=-y,\quad \frac{dy}{dt}=x,$$

解曲线族为　$x^2+y^2=c\geqslant 0$。这个系统只有一个有限奇点，即

$$x=y=0.$$

对于 $c>0$，$x^2+y^2=c$ 是一个圆，它既不经过有限奇点 $x=y=0$，又不延伸到∞处。

实域没有"有根定理"，其原因是它只能取 $\theta=0$ 或 π 两值，即自变量 t 只能取正、负两个方向。复域 θ 可以取 0 到 2π 中的各种值，故延伸的可能性极大地增加。

在复域中

$$\frac{dw}{dT}=-z,\quad \frac{dz}{dT}=w$$

之解曲面族

$$w^2+z^2=c\quad(\text{复数}),$$

当$|z|\to+\infty$，则$|w|\to+\infty$，即曲面无界。

注意 2　对于∞处的处理，可有不同的方法。一种是用复变函数的方法，例如用 $w=\frac{1}{\xi}$，$z=\frac{1}{\eta}$，则分别将 w 平面及 z 平面上的∞点等价于 ξ 平面及 η 平面上的原点。注意，这样处理时，一个方程

$$\frac{dw}{dz}=\frac{W_m(w,z)}{Z_n(w,z)}$$

应和下面三个方程同时考虑为一组方程，即

$$w=\frac{1}{\xi},\ z,\quad \frac{d\xi}{dz}=-\xi^2\frac{W_m\left(\frac{1}{\xi},\ \ z\right)\xi^k}{Z_n\left(\frac{1}{\xi},\ \ z\right)\xi^k},\quad k=\mathrm{Max}(m-2,n),$$

$$w,z=\frac{1}{\eta},\ \frac{dw}{d\eta}=-\frac{1}{\eta^2}\ \frac{W_m\left(w,\ \frac{1}{\eta}\right)\eta^h}{Z_n\left(w,\ \frac{1}{\eta}\right)\eta^h},\quad h=\mathrm{Max}(n-2,m),$$

$$w=\frac{1}{\xi},z=\frac{1}{\eta},\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{\xi^2}{\eta^2}\ \frac{W_m\left(\frac{1}{\xi},\ \frac{1}{\eta}\right)\xi^k\eta^h}{Z_n\left(\frac{1}{\xi},\ \frac{1}{\eta}\right)\xi^k\eta^h},\quad \begin{array}{l}k=\mathrm{Max}(m-2,n),\\ h=\mathrm{Max}(n-2,\ m).\end{array}$$

使得右方均化为有理函数，奇点亦作相应的研究。

例如 $\frac{dw}{dz}=-\frac{z}{w}$，应与三个方程

$$\frac{d\xi}{dz}=\xi^3 z,\quad \frac{dw}{d\eta}=\frac{1}{w\eta^3},\quad \frac{d\xi}{d\eta}=-\frac{\xi^3}{\eta^3}$$

同时考虑成为一组方程，则 $\xi=\eta=0$ 也是一个奇点，并且解曲面族

$$w^2+z^2=c$$

可化为

$$\xi^2+\eta^2=C\,\xi^2\eta^2.$$

由此可见，对于任何 C（有限数），均过 $\xi=\eta=0$ 点，即所有解曲面均过奇点 $\xi=\eta=0$。

这种性质，我们称之为“强有根性”。

当然，这种处理方法，∞处经常出现高阶奇点，一般处理有困难。

另一种处理方法，则是用庞加莱的处理方法，例如 $w=\frac{1}{\xi}$，

$z=\frac{\eta}{\xi}$，研究 $\xi=0$ 的情形，这时∞处的奇点一般被分解为一次奇点，便于处理。以下我们将仍用庞加莱处理法。

§3. 强有根性定理

定义1.1 如果一个复域微分方程组的每一张积分曲面均过奇点（有限奇点及按庞加莱定义下的无限奇点），则这个微分方程系统称为具有强有根性。

下面我们将证明几类常见系统具有强有根性。

定理 1.2 线性方程组

$$\frac{dw}{dT}=\alpha w+\beta z,\quad \frac{dz}{dT}=\gamma w+\delta z,$$

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,$$

具有强有根性。

证明 这里有三种类型：焦点型、结点型及中心鞍点型。

已知焦点型、结点型的积分曲面均与原点相联，故具有强有根性。因此，只需验证中心鞍点型。将方程组化为下面的典型形式

$$\frac{dw}{dT}=w,\quad \frac{dz}{dT}=-az,\qquad a>0,$$

则利用

$$w=\frac{1}{\xi},\quad z=\frac{\eta}{\xi},\qquad d\tau=\frac{1}{\xi}dT,$$

可将方程组化为

$$\frac{d\xi}{d\tau}=-\xi,\quad \frac{d\eta}{d\tau}=-\xi-a\eta.$$

这时

$$\Lambda=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=-\frac{(-1)}{(-a)}=-\frac{1}{a}<0.$$

故 $\xi=\eta=0$ 点为一个结点；因此，所有曲面均过(无限远)奇点。

也可直接验证如下：通积分为

$$wz^{a}=\text{const}, \quad a>0.$$

以 $w=\dfrac{1}{\xi}$，$z=\dfrac{\eta}{\xi}$ 代入，则有

$$\eta^{a}=C\xi^{1+a}.$$

故对任何 C，$\xi=\eta=0$ 在曲面上。

在一种特殊类型

$$\frac{dw}{dT}=-z, \quad \frac{dz}{dT}=w,$$

这时化为

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\xi, \quad \frac{d\eta}{d\tau}=1+\eta^{2},$$

则有两个奇点

$$\xi=0, \ \eta=\pm i.$$

通积分 $w^{2}+z^{2}=C$ 可化为

$$1+\eta^{2}=C\xi^{2},$$

对任何 C，均过 $\xi=0$，$\eta=\pm i$。

总之，积分曲面过（无限远）奇点。

定理 1.2 验证完毕。

下面是非线性情形的强有根性定理。

定理 1.3 设实二次系统(E_2)有一个实二次代数极限环，将这种(E_2)自然扩展到复域得到的(E_2^*)具有强有根性。

证明 具有实二次代数极限环的实二次系统可以化为下面的典型形式：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=x(au+bx+c)+(u^{2}+x^{2}-1), \\ \dfrac{dx}{dt}=-u(au+bx+c). \end{cases}$$

其参数满足不等式

$$b^2 < a^2 + b^2 < c^2.$$

将此系统自然扩展到复域，得到复系统

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dT} = z(aw+bz+c)+(w^2+z^2-1), \\ \dfrac{dz}{dT} = -w(aw+bz+c). \end{cases}$$

证明分为两步。第一步证明 $a=0$ 时，系统具有强有根性；第二步证明 $a\neq 0$ 时，系统的强有根性仍保持。

$a=0$，(E_2^*)有七个奇点，四个有限奇点，三个无限远奇点。

$w=0$ 上的两个有限奇点用 P_1 及 P_2 记。

$bz+c=0$ 上的两个有限奇点用 P_3 及 P_4 记。

$P_3(w_3, z_3)$及 $P_4(w_4, z_4)$由

$$bz+c=0 \text{ 及 } w^2+z^2-1=0$$

联立解出，得到

$$w_3 = \sqrt{\frac{c^2-b^2}{b^2}}\,i, \qquad z_3 = -\frac{c}{b},$$

$$w_4 = -\sqrt{\frac{c^2-b^2}{b^2}}\,i, \quad z_4 = -\frac{c}{b}.$$

以 $w=\dfrac{1}{\xi}$，$z=\dfrac{\eta}{\xi}$，则得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = -\xi\{(1+b)\eta^2+c\xi\eta+1-\xi^2\}, \\ \dfrac{d\eta}{d\tau} = -b\eta-c\xi-\eta\{(1+b)\eta^2+c\xi\eta+1-\xi^2\}. \end{cases}$$

由此，在∞处有奇点 $\xi=0$，$-(1+b)\eta(1+\eta^2)=0$，即

$$(\xi, \eta)=(0, 0), (0, i), (0, -i).$$

分别用 P_5，P_6，P_7 记。

$a=0$ 时，方程有通积分

$$(w^2+z^2-1)=\text{const}\cdot(bz+c)^{-\frac{2}{b}}.$$

分两种情形来验证：

当 $b<0$，则 $-\frac{2}{b}>0$，故对任何通积分常数，$w^2+z^2-1=0$ 与 $bz+c=0$ 之交点满足此方程，亦即所有的积分曲面均通过 P_3 与 P_4。此时对于 P_3 与 P_4 有

$$\Lambda=\frac{b}{2}<0,$$

故 P_3 与 P_4 为结点。

当 $b>0$，则用 $w=\frac{1}{\xi}$，$z=\frac{\eta}{\xi}$，通积分化为

$$(1+\eta^2-\xi^2)(b\eta+c\xi)^{-\frac{2}{b}}=\text{const}\cdot\xi^{2\left(1+\frac{1}{b}\right)}.$$

由于 $\frac{2}{b}>0$，故所有的积分曲面均通过

$$(\xi,\eta)=(0,0),\ (0,i),\ (0,-i)$$

三点中至少一点，即通过 P_5，P_6，P_7 中至少一点。这时对 P_5，P_6，P_7 有

$$\Lambda=-\frac{b}{1+b},\ -\frac{b}{2(1+b)},\ -\frac{b}{2(1+b)},$$

均为负数，故 P_5，P_6，P_7 均为结点。

严格地说，当 $\text{const}=0$，即 $w^2+z^2-1=0$ 时，曲面过 P_6 及 P_7，但不过 P_5。当 $\text{const}=\infty$，即 $bz+c=0$，则曲面过 P_5，但不过 P_6 及 P_7。除此之外，所有的积分曲面(当 $\text{const}\neq 0,\infty$)均过 P_5，P_6 及 P_7。

当 b 由负趋于 0，则 P_3 与 P_4 趋于 P_6 与 P_7，最后重合，故 $b=0$ 是过渡情形，所有积分曲面过 P_6 与 P_7。

总之，$a=0$ 时，所有积分曲面过奇点。

第二步，命 $a\neq 0$ 要验证强有根性仍保持。

对 $b<0$，则 P_3 与 P_4 的座标为

$$w_{3,4}=\frac{-ac\pm bi\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a^2+b^2},$$

$$z_{3,4}=\frac{-bc\mp ai\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{a^2+b^2}.$$

$$\lambda_1=2w_{3,4},\quad \lambda_2=az_{3,4}-bw_{3,4},$$

故

$$\Lambda=\frac{b}{2}\ \frac{c^2-b^2+a^2}{c^2-b^2}\mp\frac{ac}{2}\ \frac{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{c^2-b^2}i,$$

故

$$\mathrm{Im}(\Lambda)=\mp\frac{ac}{2}\ \frac{\sqrt{c^2-b^2-a^2}}{c^2-b^2}\neq 0.$$

所以 P_3 与 P_4 均为焦点。

注意到 P_3 与 P_4 由结点变为焦点时，在其附近，积分曲面过奇点的性质仍不改变，因此所有积分曲面过奇点的性质仍不改变.

当 $b>0$ 时，∞处方程可化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{d\tau}=-\xi[a\eta+b\eta^2+c\eta\xi+1+\eta^2-\xi^2],\\[2mm] \dfrac{d\eta}{d\tau}=(-a-b\eta-c\xi)-\eta[a\eta+b\eta^2+c\eta\xi+1+\eta^2-\xi^2].\end{cases}$$

∞处三奇点的座标为

$$(\xi,\ \eta)=\left(0,\quad \frac{-a}{1+b}\right),\ (0,\ i),\ (0,\ -i);$$

其示性数分别为

$$\Lambda=-\frac{1+b}{(1+b)^2+a^2},\ \frac{\{-b(1+b)-a^2\}+ia}{2(1+b)^2+a^2},$$

$$\frac{\{-b(1+b)-a^2\}-ia}{2(1+b)^2+a^2}.$$

由于 $b>0$，因此

P_5 处 $\Lambda<0$，P_5 仍为结点；

$P_{6,7}$ 处 $\mathrm{Im}(\Lambda)=\dfrac{\pm a}{2(1+b)^2+a^2}\neq 0$，$P_6, P_7$ 变为焦点。

由此可见，某一积分曲面过某一奇点之性质仍不改变。

$b=0$ 为上两情形的过渡。

总之，具有二阶代数极限环的(E_2^*)系统具有强有根性。定理 1.3 得证。

定理 1.4 对称二次系统具有高阶焦点时，系统具有强有根性。

证明 对称二次系统

$$\frac{du}{dt}=U_2(u,\ x),\quad \frac{dx}{dt}=X_2(u,\ x).$$

$$U_2(-u,-x)=U_2(u,x),\ X_2(-u,-x)=X_2(u,x).$$

又设它的高阶焦点在 $x=0$，$y=\pm 1$，则方程可化为

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{2}u^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x^2,\\[2mm] \dfrac{dx}{dt}=ux+\varepsilon u^2, \quad \varepsilon\neq 0.\end{cases}$$

这时，在(0，1)处有 $V_1=0$，$V_3=-\varepsilon$，

在(0，−1)处有 $V_1=0$，$V_3=+\varepsilon$。

故均为一阶焦点。

下面扩展到复域，即

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dT}=\dfrac{1}{2}w^2-\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{2},\\[2mm] \dfrac{dz}{dT}=wz+\varepsilon w^2.\end{cases}$$

下面分两个步骤来证明其强有根性。

$\varepsilon=0$ 时，方程组有通积分

$$w^2+z^2+1=\mathrm{const}\cdot z.$$

命 $w=\dfrac{1}{\xi}$，$z=\dfrac{\eta}{\xi}$有

$$1+\eta^2+\xi^2=\text{const}\cdot\eta\xi.$$

由此可见，所有曲面均过$w^2+z^2+1=0$ 与 $z=0$ 之交点，即

$$P_3(i,\ 0),\ P_4(-i,\ 0).$$

所有曲面均过$(\xi,\ \eta)=(0,\ 0)$，$(0,\ i)$，$(0,\ -i)$三者之一，即过 P_5，P_6 及 P_7。

下面分别研究 $\varepsilon^2<1$ 及 $\varepsilon^2>1$ 的情形。

当 $\varepsilon\neq 0$，$\varepsilon<1$ 时，P_3，P_4 变到

$$w_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon^2}}i,\quad z_{3,4}=\mp\varepsilon\sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon^2}}i.$$

则在 P_3 及 P_4 有

$$\Delta=\frac{-1+\varepsilon}{1+\varepsilon}<0\qquad(\varepsilon^2<1).$$

这时 P_3 与 P_4 仍保持结点的性质，故系统仍具有强有根性。

下面研究 $\varepsilon^2>1$ 的情形。

这时∞处的方程可化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{d\tau}=-\xi\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\eta^2+\dfrac{1}{2}\xi^2\right],\\[2ex]\dfrac{d\eta}{d\tau}=\eta+\varepsilon-\eta\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\eta^2+\dfrac{1}{2}\xi^2\right].\end{cases}$$

三个∞奇点在

$$\xi=0,\ \eta^3+\eta+2\varepsilon=0.$$

这个方程有一实根和两复根，分别对应于 P_5,P_6 及 P_7 的 η 有

$$\eta=\sqrt[3]{-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2+\frac{1}{2\eta}}}+\sqrt[3]{-\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2+\frac{1}{2\eta}}}.$$

$$\Delta=\frac{1-\eta^2}{1+3\eta^2}<0.$$

因 $\varepsilon^2>1$ 时，实根 $\eta^2>1$，故 P_5 为结点。

由于 $\eta^3+\eta+2\varepsilon=0$，

故

$$\eta^2=-\frac{\eta+2\varepsilon}{\eta},$$

$$\Lambda=-\frac{\eta+\varepsilon}{\eta+3\varepsilon}=-1+\frac{2\varepsilon}{\eta+3\varepsilon}=-1+\frac{2\varepsilon(\bar{\eta}+3\varepsilon)}{(\eta+3\varepsilon)(\bar{\eta}+3\varepsilon)}$$

$$=\left[-1+\frac{6\varepsilon^2}{(\eta+3\varepsilon)(\bar{\eta}+3\varepsilon)}\right]+\frac{2\varepsilon}{(\eta+3\varepsilon)(\bar{\eta}+3\varepsilon)}\bar{\eta}.$$

$$\operatorname{Im}(\Lambda)=\frac{2\varepsilon}{(\eta+3\varepsilon)(\bar{\eta}+3\varepsilon)}\operatorname{Im}(\bar{\eta})\neq 0,\ \text{当}\ \operatorname{Im}(\bar{\eta})\neq 0.$$

故对于复η，$\operatorname{Im}(\Lambda)\neq 0$，故 P_6 及 P_7 为焦点。

总之 P_5,P_6,P_7 附近积分曲面到它们的性质不变，即所有积分曲面均过 P_5，P_6，P_7 之一。定理 1.4 验证完毕。

更重要的强有根性类型的定理，将在第四篇第二章中证明。

第二章　联系理论

§1. 极限联系定理

定理 2.1　设一个实系统 (E_n) 的一条实积分曲线 C 是另一条实积分曲线 C_1 的极限曲线，亦即 $\overline{C}_1 \supset C$. 将 (E_n) 自然扩展为复系统 (E_n^*)，C 及 C_1 也自然扩充为积分曲面 $\mathscr{F}$ 及 $\mathscr{F}_1$，则 $\mathscr{F}$ 必为 $\mathscr{F}_1$ 的极限曲面，亦即 $\overline{\mathscr{F}}_1 \supset \mathscr{F}$.

证明　设 (E_n) 的方程为

$$\frac{du}{dt}=A(u,x), \qquad \frac{dx}{dt}=B(u,x) \qquad (E_n)$$

自然扩展为

$$\frac{dw}{dT}=A_n(w,z), \quad \frac{dz}{dT}=B_n(w,z); \quad (E_n^*)$$

C 及 C_1 扩展为 $\mathscr{F}$ 及 $\mathscr{F}_1$. 为证明的确切计，可以作如下的扩展. 注意到

$$dT=e^{i\theta}dr$$

当 $\theta=0$ 及 π，则由 C 及 C_1 上之点出发之积分曲线仍在实平面上，当 $\theta \neq 0, \pi$，则由 C 及 C_1 上之点出发之积分曲线将离开实平面.

为确切计，取 $\theta=\frac{\pi}{2}$，r 可正可负，则 (E_n^*) 化为方程组

$$\frac{dw}{dr}=iA_n(w,z), \quad \frac{dz}{dr}=iB_n(w,z).$$

或写成四维实空间中的系统，有

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U_n(u,v,x,y) \\ V_n(u,v,x,y) \\ X_n(u,v,x,y) \\ Y_n(u,v,x,y) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

现在在$\mathscr{F}$上任取一点Q_0，则因$\mathscr{F}$是由C自然扩展而得，故Q_0是由C上一点P_0，沿(2.1)所定义的积分曲线，用τ由0积分到τ_0而来。用动力系统的记号，可写成

$$Q_0=f(P_0,\ \tau_0).$$

现在P在C上，$C\subset\overline{C}_1$，故C_1上有一系列的点$\{P_j\}$，$P_j\to P_0$，当$j\to\infty$，则点列

$$Q_j=f(P_j,\ \tau_0)$$

在$\mathscr{F}_1$上．对于(E_n)，(E_n^*)及(2.1)，解对于初值有连续依赖性，因此，固定τ_0，则当$j\to\infty$，

$$P_j\to P_0 \text{ 导到 } Q_j\to Q_0,$$

由此知　$Q_0\in\overline{\mathscr{F}}$，故$\mathscr{F}\subset\overline{\mathscr{F}}_1$.

定理 2.1　证毕。

定理 2.1　的逆定理为

定理 2.2　设一个实系统(E_n)的两实积分曲线C及C_1自然扩展为复系统(E_n^*)的两积分曲面$\mathscr{F}$及$\mathscr{F}_1$，如果$\overline{\mathscr{F}}_1\not\supset\mathscr{F}$，则$\overline{C}_1\not\supset C$.

下面是极限联系定理 2.1 的应用.

定理 2.3　设一个实系统(E_n)的一个实极限环C自然扩展为一个复系统(E_n^*)的一个积分曲面$\mathscr{F}$，如果$\mathscr{F}$上有一个焦点P(即$\mathrm{Im}(\Lambda)|_p\neq0$)，则$\mathscr{F}$是过$P$点的一张孤立限极曲面.

证明　C为(E_n)的一个实限极环，故(E_n)有另一积分曲线C_1，$\overline{C}_1\supset C$，则由C_1自然扩展成的曲面$\mathscr{F}_1$，按定理 2.1 有$\overline{\mathscr{F}}_1\supset\mathscr{F}$，故$\mathscr{F}$是过焦点$P$的一张极限曲面．由于$\mathrm{Im}(\Lambda)|_p\neq0$,

故过P点只有两张极限曲面，因此$\mathscr{S}$必为其中之一张．而这两张极限曲面又都是孤立的，因此，$\mathscr{S}$是过P点的一张孤立极限曲面．定理2.3证毕。

例
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=x(au+bx+c)+(u^2+x^2-1), \\ \dfrac{dx}{dt}=-u(au+bx+c), \end{cases} \qquad (E_2)$$

$$b^2<a^2+b^2<c^2,$$

有实极限环
$$u^2+x^2-1=0.$$

自然扩充为

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dT}=z(aw+bz+c)+(w^2+z^2-1), \\ \dfrac{dz}{dT}=-w(aw+bz+c), \end{cases}$$

$$b^2<a^2+b^2<c^2,$$

有曲面
$$w^2+z^2-1=0,$$

它经过复焦点P_3及P_4，在这两点有

$$\operatorname{Im}(\Lambda)=\mp\frac{ac}{2}\ \frac{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}{c^2-b^2}\neq 0.$$

不难直接验证$w^2+z^2-1=0$是过通这两个焦点的孤立极限曲面。

在P_3处有$\lambda_1=2w_3$，$\lambda_2=az_3-bw_3$，

$$F\equiv w^2+z^2-1\equiv(w-w_3+w_3)^2+(z-z_3+z_3)^2-1$$
$$\equiv 2w_3(w-w_3)+2z_3(z-z_3)+(w-w_3)^2+(z-z_3)^2,$$

$$\frac{dF}{dT}\equiv\frac{\partial F}{\partial w}\ \frac{dw}{dT}+\frac{\partial F}{\partial z}\ \frac{dz}{dT}\equiv 2w(w^2+z^2-1)$$
$$\equiv(2w_3+2(w-w_3))F\equiv(2w_3+\cdots)F.$$

这就证明$F=0$是P_3点$\lambda=\lambda_1=2w_3$方向上的孤立极限曲面。

曲面$w^2+z^2-1=0$又通过∞处的两焦点P_6、P_7，在这两点有

$$\operatorname{Im}(\Lambda)=\frac{\pm a}{2(1+b)^2+a^2}\neq 0.$$

不难直接验证 $w^2+z^2-1=0$ 是通过这两焦点的孤立极限曲面。

定理 2.4 设一个实系统 (E_n) 的一个实积分曲线 C 自然扩充为一个复系统 (E_n^*) 的一个积分曲面 $\mathscr{F}$，如果 $\mathscr{F}$ 上有一个结点 P，并且 $\Lambda(P)$ 为负有理数，但不为 -1，则 C 不是 (E_n) 的极限环。

证明 用反证法。如果 C 为 (E_n) 的极限环，则 $\mathscr{F}$ 为极限曲面，$\mathscr{F}$ 过 P，但 $\Lambda(P)$为有理数，$\Lambda(P)$不为 -1，故在 P 点附近没有孤立极限曲面。定理 2.4 证毕。

至于 Λ 为无理数，或 $\Lambda=-1$，还需进一步具体分析。

例 具有高阶焦点的对称二次系统

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{2}u^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x^2,\\ \dfrac{dx}{dt}=ux+su^2,\end{cases}$$

自然扩展为

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dT}=\dfrac{1}{2}w^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}z^2,\\ \dfrac{dz}{dT}=wz+sz^2,\end{cases}\qquad s\neq 0,$$

则所有积分曲面均过奇点 P_3 及 P_4，它们有

$$\Lambda=\frac{-1+s}{1+s}=\frac{s^2-1}{(1+s)^2}\neq -1. \qquad (\text{因 } s\neq 0)$$

当 $s^2<1$ 时，$\Lambda<0$，即为结点。

当 s 为有理数时，Λ 为有理数，故这个系统没有极限环。由于有理数 s 是处处稠密的，又由于解对初值的连续依赖性，因此对 s 为无理数时，也不存在极限环。这在实定性理论中已为索光俭所证明。

§2. 实焦点与实极限环不联通定理

定理 2.5 设 (E_n) 为一实系统，P 为其一实焦点，C 为其一实极限环．则将 (E_n) 自然扩展为复系统 (E_n^*) 时，通过 C 之曲面不通过 P 点。

证明 不失普遍性，不妨设 P 为原点。在 P 点附近，方程 (E_n) 为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=a_{10}u+a_{01}x+\cdots, \\ \dfrac{dx}{dt}=b_{10}u+b_{01}x+\cdots. \end{cases}$$

a_{10}，a_{01}，b_{10}，b_{01} 为实数，但 P 为焦点，故

$$\begin{vmatrix} a_{10}-\lambda & a_{01} \\ b_{10} & b_{01}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{10}+b_{01})\lambda+(a_{10}b_{01}-a_{01}b_{10})=0$$

之 λ 为复数．以 λ_1，λ_2 记它们。

沿 λ 的方向的孤立极限曲面 $\mathscr{F}$ 在原点附近

$$F(w,\ z)\equiv C_{10}w+C_{01}z+\cdots,$$

则有

$$\frac{dF}{dT}\equiv(\lambda+\cdots)F,$$

即

$$\begin{aligned} &C_{10}(a_{10}w+a_{01}z+\cdots)+C_{01}(b_{10}w+b_{01}z+\cdots) \\ &\equiv(\lambda+\cdots)(C_{10}w+C_{01}z+\cdots). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} C_{10}a_{10}+C_{01}b_{10}&=\lambda C_{10}, \\ C_{10}a_{01}+C_{01}b_{01}&=\lambda C_{01}. \end{aligned}$$

由此有

$$C_{10}:\ C_{01}=(b_{10}):(\lambda-a_{10})=(\lambda-b_{01}):a_{01}.$$

由于 λ 是复数，a_{10}，a_{01}，b_{10}，b_{01} 都是实数，故 $C_{10}:C_{01}$ 是复数，$\mathrm{Im}(C_{10}/C_{01})=\mathrm{Im}(\lambda)/a_{01}\neq 0$.

另一方面，C 之方程可写成实函数

$$G(u,x)=0.$$

自然扩展为 $G(w, z)=0$. 如果这个曲面过原点 P，则 $G(0, 0)=0$. 在原点附近展开有

$$0=G(w,z)=G(0,0)+\frac{\partial G}{\partial w}\bigg|_{(0,0)}w+\frac{\partial G}{\partial z}\bigg|_{(0,0)}z+\cdots$$

$$=\frac{\partial G(u,x)}{\partial u}\bigg|_{(0,0)}w+\frac{\partial G(u,x)}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}z+\cdots,$$

故 $\frac{\partial G(u,x)}{\partial u}\Big|_{(0,0)}$ 及 $\frac{\partial G(u,x)}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$ 为实数，因此

$\frac{\partial G}{\partial u}\Big|_{0,0}\Big/\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$ 为实数，故不能等于 $C_{10}:C_{01}$. 但由于前节定理 2.3 知道 $G=0$ 要经过焦点，则必为孤立极限曲面；因此，利用复数不能等于实数的性质，可知 $G(w,z)=0$ 不能通过 P 点。定理 2.5 证毕。

由此立即得到

定理 2.6 设 P 为实系统 (E_n) 的一个实焦点，则将 (E_n) 自然扩展到复系统 (E_n^*)，过 P 点的所有积分曲面均不产生实极限环.

对于高阶焦点，由第二篇知

$$\Phi=x+iy+\cdots,$$

故 $C_{10}:C_{01}=-i$ 是虚数，因此不等于实数，故定理 2.6 对高阶焦点也成立。

但是，从高阶焦点可以经过扰动跳出一串极限环，这将在下章中详述。

§3. 实鞍点附近的联通定理

在实域中，一个实鞍点有两条分界线通过它。每条分界线被

鞍点分为两段，在鞍点附近，不经过鞍点，这两段不能相通。但在复域内则是另一回事。

定理 2.7 一个实系统 (E) 的一个实鞍点有两条分界线，每条分界线由鞍点分为两段，通过 (E^*) 的积分曲面，这两段可不经过鞍点而互相联系。

证明 经实非奇异变换可将鞍点移到原点，方程可以化为

$$\frac{dw}{dT}=\lambda w+\text{高阶项}，\frac{dz}{dT}=-z+\text{高阶项}，\lambda>0,$$

则已知有两曲面

$$w=w_1(z)=c_2z^2+c_3z^3+\cdots$$
$$z=z_1(w)=d_2w^2+d_3w^3+\cdots$$

这里 c_n，d_n 均为实数。

对于 $w=w_1(z)$，将 $z=z_0e^{i\theta}$，z_0 为实数 >0，θ 由 0 变到 π，则对应的点 (w,z)，即由分界线上的一段，变到另一段，但 $z_0>0$，故这些点不经过原点．同理对 $z=z_2(w)$ 也如此．定理 2.7 证毕。

根据解对于初值的连续性，可以看到在一段附近的点也可经 (E^*) 的积分曲面与另一段附近的某些点相联。

这个事实的一个应用是

定理 2.8 设一个实系统 (E) 的一个鞍点 S 的一个分界线 l 到达一结点或焦点 P，则 S 附近的实积分曲线或者与 P 相联，或者通过 (E^*) 的曲面与 P 相联。

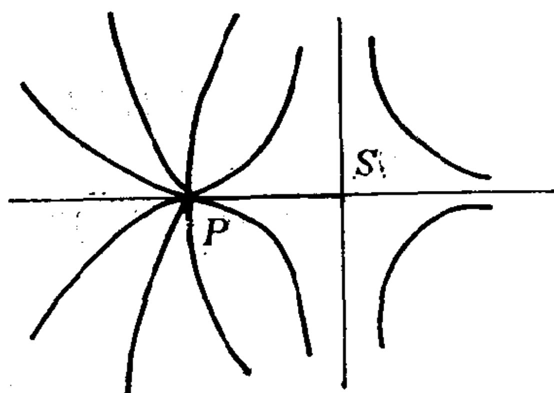


图 2

证明 S 附近两分界线与 S 相联，在一个分界线的一侧均必与 P 在实平面上相联（如图 2）．问题在于另一侧的实积分曲线。根据

定理 2.7，同一分界线两段可以不经S，而经(E^*)之积分曲面相联通。利用解对于初值的连续性，在S附近一侧的积分曲线也可经过(E^*)的积分曲面与另一侧的点相联，只要到达另一侧，则均与P相联，因PS线段附近的点均可经过(E^*)的积分曲面与P相联．定理 2.8 证毕。

定理 2.8 的一个直接应用是

定理 2.9 设一个实系统(E)自然扩展为复系统(E^*)，设(E^*)有一对复共轭奇点，并且所有积分曲面均过此共轭复奇点；设变更(E)之参数使这一对共轭复奇点重合为一实奇点，再分解为一对实奇点，一个结点和一个鞍点，其他奇点性质不变，则系统(E)的积分曲线通过(E^*)的积分曲面均与这个结点或鞍点相联．

例 一个带参数a的系统

$$\frac{du}{dt}=u^2+a, \qquad \frac{dx}{dt}=x, \qquad (E_a)$$

a由正变负．

当$a>0$，则

$$\frac{dw}{dT}=w^2+a, \quad \frac{dz}{dT}=z, \qquad (E_a^*)$$

有两个共轭复奇点

$$P_1(\sqrt{a}\,i,\ 0),\ P_2(-\sqrt{a}\,i,0),$$

$$\Lambda_1=-\sqrt{a}\,i,\ \Lambda_2=\sqrt{a}\,i,$$

$$\mathrm{Im}(\Lambda_1)=-\sqrt{a}\neq 0,\ \mathrm{Im}(\Lambda_2)=\sqrt{a}\neq 0,$$

故均为焦点。

通解为

$$(w+\sqrt{a}\,i)\,(w-\sqrt{a}\,i)^{-1}\,z^{2\sqrt{a}\,i}=\text{const}.$$

积分曲面均过P_1及P_2.

当a由正变负，$a<0$，则系统(E_a^*)有两个实奇点

$$P_4(+\sqrt{-a},\ 0),\quad P_5(-\sqrt{-a},\ 0),$$

$$\Lambda_4=-\sqrt{-a}<0,\quad \Lambda_5=\sqrt{-a}>0。$$

故 P_4 为结点，P_5 为鞍点。

通解为

$$(w+\sqrt{-a})(w-\sqrt{-a})^{-1}z^{2\sqrt{-a}}=\text{const}.$$

则有一张积分曲面过 P_5，即 $w+\sqrt{-a}=0$，这相应于 const$=0$。除此之外，其他积分曲面均过 P_4。

第三章　高阶焦点与串环定理

§1.　实域中的处理

设有一实系统

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\lambda_1 u-x+\sum\limits_{N=2}^{\infty}\sum\limits_{j+k=N}a_{jk}u^jx^k,\\ \dfrac{dx}{dt}=u+\lambda_1 x+\sum\limits_{N=2}^{\infty}\sum\limits_{j+k=N}b_{jk}u^jx^k,\end{cases}\tag{E}$$

引入极座标

$$u=\rho\cos\varphi,\ \ x=\rho\sin\varphi,\tag{3.1}$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho}{dt}=\lambda_1\rho+\rho^2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\cos\varphi,\ \ \sin\varphi)\rho^k,\\ \dfrac{d\varphi}{dt}=1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k(\cos\varphi,\ \ \sin\varphi)\rho^k,\\ \dfrac{d\rho}{d\varphi}=\rho\dfrac{\lambda_1+\rho\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k(\cos\varphi,\ \ \sin\varphi)\rho^k}{1+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\beta_k(\cos\varphi,\ \ \sin\varphi)\rho^k}\end{cases}$$

$$=\rho[\lambda_1+\rho\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(\cos\varphi,\ \ \sin\varphi)\rho^k].\tag{3.2}$$

γ_k 为 $(k+1)$ 次的三角函数齐次式。现在用

$$\rho=\rho(\varphi;\rho_0)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\varphi)\rho_0^k\tag{3.3}$$

代入 (3.2)。此处

$$\rho_0=\rho(0;\rho_0),\ u_1(0)=1,\ u_k(0)=0,\quad (k>1).$$

则可对 ρ_0^k 的同次幂相等，写出 $u_k(\varphi)$ 的微分方程，以便算出 $u_k(2\pi)$. 由此得出表达式

$$\rho(2\pi,\ \rho_0)-\rho_0=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(2\pi)\rho_0^k-\rho_0.$$

对于 ρ_0^1 有

$$\frac{du_1(\varphi)}{d\varphi}=\lambda_1u_1(\varphi),\quad u_1(0)=1,$$

故
$$u_1(\varphi)=e^{\lambda_1\varphi},\ u_1(2\pi)=e^{\lambda_1 2\pi}.$$

由此知

$$\rho(2\pi,\ \rho_0)-\rho_0=\rho_0[e^{\lambda_1 2\pi}-1]+\sum_{k=2}^{\infty}u_k(2\pi)\rho_0^k.$$

当 $\lambda_1\neq0$，则原点附近$\rho(2\pi,\ \rho_0)-\rho_0$ 与 $\rho_0[e^{\lambda_1 2\pi}-1]$ 同号，故不为0，由此得到普通的实焦点。

当 $\lambda_1=0$，则方程 (3.2) 化为

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho^2\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(\cos\varphi,\ \sin\varphi)\rho^k;\qquad (3.4)$$

(3.3) 化为

$$\rho=\rho(\varphi,\ \rho_0)=\rho_0+\sum_{k=2}^{\infty}u_k(\varphi)\rho_0^k.$$

因为这时 $u_1(\varphi)\equiv1$. 对于 ρ_0^2 项有

$$\rho_0^2:\ \frac{du_2(\varphi)}{d\varphi}=\gamma_0(\varphi),\quad u_2(0)=0.$$

$u_2(\varphi)=\int_0^{\varphi}\gamma_0(\cos\varphi,\ \sin\varphi)d\varphi$ 为 φ 之 2π 周期函数。对于 ρ_0^3 项有

$$\rho_0^3:\ \frac{du_3(\varphi)}{d\varphi}=2u_2(\varphi)\gamma_0(\varphi)+\gamma_1(\varphi),\quad u_3(0)=0.$$

由于 $\gamma_1(\varphi)$ 可能出现常数项，故 $u_3(\varphi)$ 不一定是 φ 的周期函数。

一般 $\gamma_k(\varphi)$ 是 φ 的三角函数的 $(k+1)$ 次齐次式； 因此，若要出现非周期的 $u_k(\varphi)$，则 k 为奇数，第一个不为零的 $u_{2k+1}(2\pi)$，可以将展式写成

$$\rho(2\pi,\ \rho_0)-\rho_0=u_{2k+1}(2\pi)\rho_0^{2k+1}+\cdots;$$

这个 k 便是此焦点的阶数。

这是庞加莱及李雅普诺夫已得到的结果。

当系统(E)的系数加以微扰，使得焦点降一阶，得到

$$\rho(2\pi,\ \rho_0)-\rho_0=u_{2k-1}(2\pi)\rho_0^{2k-1}+\cdots,$$

并要求 $u_{2k+1}(2\pi)u_{2k-1}(2\pi)<0$ ，则焦点的稳定性突变，由此跳出一个极限环。

这是鲍廷用过的思想，并由此得到 (E_2) 有跳出三个极限环的例子。

下面是具体的例子

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-y+\lambda x+y^2+(5+\varepsilon)xy-3x^2, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+\lambda y+x^2+(-4+\delta-2\varepsilon)xy. \end{cases}$$

$$\varepsilon=10^{-113},\ \delta=10^{-508},\ \lambda=10^{-1556}.$$

则在

$$x^2+y^2=10^{-38},\ 10^{-254},\ 10^{-1038},\ 10^{-3124}$$

之间出现三个极限环。证明见附录二。

§2. 复域中的处理

对于高阶实焦点，$k\geqslant 1$，$\lambda_1=0$，(E)化为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=x+\sum\limits_{N=2}^{\infty}\sum\limits_{j+k=N}a_{jk}u^jx^k, \\ \dfrac{dx}{dt}=-u+\sum\limits_{N=2}^{\infty}\sum\limits_{j+k=N}b_{jk}u^jx^k, \end{cases} \qquad (E)$$

a_{jk} 及 b_{jk} 为实数。

自然扩展为实系数的复系统

$$
\begin{cases}
\dfrac{dw}{dT}=z+\sum\limits_{N=2}^{\infty}\sum\limits_{j+k=N}a_{jk}w^jz^k, \\
\dfrac{dz}{dT}=-w+\sum\limits_{N=2}^{\infty}\sum\limits_{j+k=N}b_{jk}v^jz^k.
\end{cases}
\qquad (E^*)
$$

则由第二篇第三章的处理有

$$
\Phi\equiv w+iz+\sum_{N=2}^{\infty}\sum_{j+k=N}c_{jk}v^jz^k,
$$

$$
M\equiv -i+\sum_{l=1}^{\infty}c_{2l}\,(\Phi\overline{\Phi}),
$$

$$
\frac{d\Phi}{dT}\equiv M\Phi,\quad \frac{d\overline{\Phi}}{dT}\equiv\overline{M}\,\overline{\Phi}.
$$

通解可以写成

$$
\exp\left[\frac{-1}{k(\Phi\overline{\Phi})^k}\right][\Phi\overline{\Phi}]^{-d_k}\,[\Phi/\overline{\Phi}]^{-i\mathrm{Re}(c_{2k})}
$$

$$
=\mathrm{const}\cdot(1+\cdots) \qquad (3.4)
$$

方程右方在焦点附近是解析的。

定理 3.1 当系统(E)的参数a_{jk}，b_{jk}作微小扰动，使高阶焦点由k阶下降到$(k-1)$阶，并跳出一个极限环时，则通解将由(3.4)之形式化为

$$
\exp\left[\frac{-1}{(k-1)(\Phi'\overline{\Phi}')^{k-1}}\right][\Phi'\overline{\Phi}']^{-d_{k-1}}\cdot
$$

$$
\cdot[\Phi'/\overline{\Phi}']^{-i\mathrm{Re}(c'_{2k-2})}\cdot
$$

$$
\cdot[\Phi'\overline{\Phi}'-\delta^2]^{\nu'_{k-1}}=\mathrm{const}\cdot(1+\cdots) \qquad (3.5)
$$

此处

$$
\Phi'=w+iz+\cdots,
$$

$$
\mathrm{Re}(c'_{2k-2})\mathrm{Re}(c_{2k})<0,
$$

$$
-d_{k-1}\nu'_{k-1}<0,
$$

$$
\delta^2>0.
$$

证明 (3.5)中除了一个因子$[\Phi'\overline{\Phi}'-\delta^2]^{\nu'_{k-1}}$外，均在(3.4)

中类似地出现了。这个因子的来源是跳出的极限环。注意到在实域

$$\frac{d}{dt}(\Phi'\overline{\Phi})=(\Phi'\overline{\Phi'})^{k}\{2\mathrm{Re}(c'_{2k-2})+2\mathrm{Re}(c'_{2k})\Phi'\overline{\Phi'}+\cdots\},$$

因此，在此高阶焦点附近出现的极限环即由方程

$$\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{Re}(c'_{2k-2+2l})\delta^{2l}=0$$

中解出的实根 δ^2 决定。

注意到 $\mathrm{Re}(c'_{2k-2})\mathrm{Re}(c_{2k})<0$，这是由于焦点跳出一个极限环时改变稳定性之故，以及由于解对于参数的连续依赖性 $\mathrm{Re}(c_{2k})\mathrm{Re}(c'_{2k})>0$，故上式中前两项的系数 $\mathrm{Re}(c'_{2k-2})\mathrm{Re}(c'_{2k})<0$。这样使得在焦点附近出现实根 δ^2，即

$$\Phi'\overline{\Phi'}=\delta^2>0$$

满足

$$\left.\frac{d\Phi'\overline{\Phi'}}{dt}\right|_{\Phi'\overline{\Phi'}=\delta^2}=0\ ,$$

即得一个极限环。如果 $\delta^2<0$，则得一个复曲面。当 $\delta^2\to 0$ 时，(3.5)应化为(3.4)，由此知 $(-d_{k-1})(\nu'_{k-1})<0$，以便取极限时，这一项使方程右方出现指数上方的函数变化。

利用上述定理即可得到

定理 3.2 设实系统(E)有一个 k ($k>0$) 阶细焦点，则对其参数 a_{jk}，b_{jk} 作适当微扰后，可以依次跳出 k 个极限环，而此细焦点化为一粗焦点，其通解则由

$$\exp\left[\frac{-1}{k(\Phi\overline{\Phi})^{k}}\right][\Phi\overline{\Phi}]^{-d_k}\ [\Phi/\overline{\Phi}]^{-i\mathrm{Re}(c_{2k})}$$
$$=\mathrm{const}\cdot(1+\cdots)$$

化为

$$[\Phi'\overline{\Phi'}]^{-d_0}[\Phi'/\overline{\Phi'}]^{-i\mathrm{Re}(c_0)}\prod_{j=1}^{k}(\Phi'\overline{\Phi'}-\delta_j^2)^{\nu_j}$$
$$=\mathrm{const}\cdot(1+\cdots),$$

其中 $$-d_0\nu_1<0,\ \nu_1\nu_2<0,\ \cdots,\ \nu_{k-1}\nu_k<0,$$
$$\delta_1^2<\delta_2^2<\cdots<\delta_k^2.$$
方程右方在原点附近为解析的。

下面是一个常见的典型例子。

研究系统(E)

$$\frac{dx}{dt}=-y+\mu x(x^2+y^2-\delta_1^2)(x^2+y^2-\delta_2^2)(x^2+y^2-\delta_3^2),$$

变动四个参数 $\mu,\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 可以得到五种情形，即中心，三阶细焦点，二阶细焦点及一个极限环，一阶细焦点及两个极限环，粗焦点及三个极限环，如下表所示，见表 121 页，这时

$$\Phi=x+iy,\quad \overline{\Phi}=x-iy.$$

这里可以看出，减少焦点的阶数，增加了极限环；从解析的角度看，则为增加了通解的因子。

另外一个值得注意的地方是，对于 k 阶细焦点，如果 $d_k=0$，则不再有可能升为($k+1$)阶焦点，如上例中三阶细焦点之$d_3=0$，而二阶细焦点外有一个环，可收缩到零，以升高焦点之阶数，这时$d_2=\frac{1}{\delta_3^4}\neq 0$。这是由于取极限环时要求通解指数上要发生跳阶的要求而来。

在出现重环$\Phi\overline{\Phi}-\delta^2=0$ 的情形下，积分中出现形如

$$(\Phi\overline{\Phi}-\delta^2)^\nu\ \exp\left[-\frac{1}{k(\Phi\overline{\Phi}-\delta^2)^k}\right]$$

之因子，$k>0$。

例如在上例中，当 $\delta_1=0$，$\delta_2=\delta_3=1$，则有一个细焦点和一个偶重环，通解为：

$$(\Phi/\overline{\Phi})^{i\mu}\ (\Phi\overline{\Phi})^2\ \exp\left[-\frac{1}{\Phi\overline{\Phi}}\right](\Phi\overline{\Phi}-1)^{-2}\cdot$$
$$\cdot\exp\left[-\frac{1}{(\Phi\overline{\Phi}-1)}\right]=\text{const}.$$

类　　型	条　　件	焦　点　量	通　　　解
中　心	$\mu=0$ $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$	$V_j\equiv 0$ $j=1,2,\cdots$	$\exp\left[\dfrac{-1}{3(\Phi\overline{\Phi})^3}\right]=\mathrm{const}$
三阶细焦点	$\mu\neq 0$ $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$	$V_1=V_3=V_5=0$ $V_7=\mu\neq 0$	$(\Phi/\overline{\Phi})^{iV_7}\exp\left[\dfrac{-1}{3(\Phi\overline{\Phi})^3}\right]=\mathrm{const}$
二阶细焦点及一个极限环	$\mu\neq 0$　$\delta_3\neq 0$ $\delta_1=\delta_2=0$	$V_1=V_3=0$ $V_5=-\mu\delta_3^2\neq 0$	$(\Phi/\overline{\Phi})^{iV_5}\exp\left[\dfrac{-1}{2(\Phi\overline{\Phi})^2}\left(1+\dfrac{2}{\delta_3^2}(\Phi\overline{\Phi})\right)\right]$ $\times(\Phi\overline{\Phi})^{\frac{1}{\delta^4_3}}(\Phi\overline{\Phi}-\delta_3^2)^{-\frac{1}{\delta^4_3}}=\mathrm{const}$
一阶细焦点及两个极限环	$\mu\neq 0$　$\delta_3\neq 0$ $\delta_2\neq 0$　$\delta_3\neq\delta_2$ $\delta_1=0$	$V_1=0$ $V_3=\mu\delta_2^2\delta_3^2\neq 0$	$(\Phi/\overline{\Phi})^{iV_3}\mathrm{exp}\left[\dfrac{-1}{(\Phi\overline{\Phi})}\right]\times(\Phi\quad\overline{\Phi})^{(\delta_2^2+\delta^2_3)}$ $(\Phi\overline{\Phi}-\delta_2^2)^{\frac{1}{\delta_2^2\delta^2_3(\delta_2^2-\delta^2_3)}}\times$ $(\Phi\overline{\Phi}-\delta_3^2)^{\frac{1}{\delta^2_3\delta^2_2(\delta^2_3-\delta^2_2)}}=\mathrm{const}$
粗焦点及三个极限环	$\mu\neq 0$　$\delta_3\neq 0$ $\delta_2\neq 0$　$\delta_1\neq 0$ $\delta_3\neq\delta_2$　$\delta_2\neq\delta_1$ $\delta_1\neq\delta_3$	$V_1=-\mu\delta_1^2\delta_2^2\delta_3^2$ $\neq 0$	$(\Phi/\overline{\Phi})^{iV_1}(\Phi\overline{\Phi})^{-1}\times$ $(\Phi\overline{\Phi}-\delta_1^2)^{\frac{-\delta^2_2\delta^2_3}{(\delta^2_1-\delta^2_2)(\delta^2_1-\delta^2_3)}}\times$ $(\Phi\overline{\Phi}-\delta_2^2)^{\frac{-\delta^2_3\delta^2_1}{(\delta^2_2-\delta^2_3)(\delta^2_2-\delta^2_1)}}\times$ $(\Phi\overline{\Phi}-\delta_3^2)^{\frac{-\delta^2_1\delta^2_2}{(\delta^2_3-\delta^2_1)(\delta^2_3-\delta^2_2)}}=\mathrm{const}$

第四篇

希尔伯特第16问题

第一章　问题、方法与结果之一例

§1. 问　题

在1900年巴黎举行的国际数学会上，大卫·希尔伯特作了题为"数学问题"的著名报告。在这篇著名报告中，他除了一般地论述数学问题在推动数学科学发展的作用外，还具体地提出了23个数学问题．这些问题吸引了数学界的广泛兴趣，并给数学的各个分支以极大的推动作用．1974年美国数学会召开了专门会议，总结这些问题已经取得的成果，和由于这些问题而进一步产生的新发展。会议出版了题为"由希尔伯特问题而引起的数学发展"的两卷集文献．这部专集对于23个问题中的22个，逐个地进行了总结和探讨．唯一的例外是第16问题，在这部专集中只是重抄了原来的问题，此外一字未提。下面是问题的原文：

16．代数曲线与曲面的拓扑问题

平面n次代数曲线所可能具有的分立封闭分支的最大数目已为哈拉克所解决．进一步出现的问题是在平面上这些分支的相对

位置。对于6次平面代数曲线，按照哈拉克定理，最多可能有11条分立封闭分支，用一种复杂的过程，我用使我自己感到满意的方式得到的结论是：不能任何两条曲线不相包，而是有一条闭曲线，在它内部有一条闭曲线，在它外部有九条闭曲线，或者反之。当闭曲线数达到最大时，对闭曲线的相对位置的彻底研究，我觉得是具有很广泛的兴趣的问题。不亚于此的是，对于空间代数曲面的个数、形式和相对位置的研究．的确，直到现在，甚至还不知道三维空间中的4次代数曲面所可能具有的分立封闭分支的最大张数是多少。

与这个纯粹代数性质的问题相联系，我希望进一步提出一个问题，我认为可以用系数连续变易的方法来攻击的，其解决是对于微分方程所定义的积分曲线族具有同等价值的问题，这就是关于一次一阶微分方程

$$dy/dx = Y_n/X_n$$

（其中 X_n 与 Y_n 是 (x,y) 的 n 次有理整函数）的庞加莱的极限环的最多个数和相对位置的问题。用齐次形式，可以写成

$$X\left(Y\frac{\partial Z}{\partial t}-Z\frac{\partial Y}{\partial t}\right)+Y\left(Z\frac{\partial X}{\partial t}-X\frac{\partial Z}{\partial t}\right)+Z\left(X\frac{\partial Y}{\partial t}-Y\frac{\partial X}{\partial t}\right)=0,$$

这里 X,Y,Z 是 x,y,z 的 n 次齐次有理函数，而 x,y,z 是参数的函数。

这个问题中关于常微分方程的部份，可以写成下面的形式：

对于实域中的 (x,y) 的 n 次多项式 $X_n(x,y)$ 及 $Y_n(x,y)$，要求出常微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=X_n(x,y) \qquad \frac{dy}{dt}=Y_n(x,y) \qquad (E_n)$$

的极限环的最多条数 $N(n)$，以及当达到最多条数时，它们的相对位置如何。

这里“极限环”一词指的是作为螺线的极限位置的孤立封闭积分曲线，其上没有奇点。

§2. 方　法

我们将应用五种方法的有机结合来攻击这一类问题。

庞加莱在1881－1886年间写的论文：《微分方程所定义的积分曲线》开创了常微分方程实域定性理论这一分支，这已取得重大的成果。极限环概念的引入，及其类比于代数方程的根的研究便是这一分支的中心部分之一。庞加莱在其全集第一卷的自我总结中，表述了他的研究思路的发展。庞加莱写道：

“自从微积分的原理建立以后，分析工作者遇到三个问题：

代数方程的求解；

代数微分的积分；

微分方程的积分。

这三个问题的历史是相同的…….”

我们知道，极限环在常微分方程定性理论中的地位非常类似于根在代数方程中的地位．注意到高斯的代数方程的基本定理：

“n次代数方程有n个根”

是在复域中得到证明的．由于类比，实域中的希尔伯特第16问题的实极限环的最多条数的问题也应在复域中作类似的研究，才更能看清问题的本质．由此，问题便将从实域的研究，转入复域的研究．

具体地说，给定实域系统

$$\frac{du}{dt}=U_n(u,x)\ ,\qquad \frac{dx}{dt}=X_n(u,x)\ . \qquad (E_n)$$

将这个系统自然扩展到复域，即命

$$W=u+iv,\quad Z=x+iy,\quad T=t+i\tau,$$

则(E_n)自然扩展为复域系统

$$\frac{dw}{dT}=W_n(w,z)\ ,\qquad \frac{dz}{dT}=Z_n(w,z)\ . \qquad (E_n^*)$$

此处

$$W_n(w,z)=U_n(w,z),\qquad Z_n(w,z)=X_n(w,z).$$

我们将从(E_n)的积分曲线族

$$F(u,x)=\text{const}$$

的研究，自然扩展为对于(E_n^*)的积分曲面族

$$F(w,z)=\text{const}$$

的研究，并再用实平面 $v=y=0$ 切这些曲面，从而返回去对实域作出结论，这便是本书的主题思想，在前第二篇及第三篇已系统论及。

第二个主要的方法是实践希尔伯特所说的“参数变易法”。这就是，将参数作微小的变动，研究拓扑结构的变与不变。在拓扑结构发生本质变化的地方，现在常称为分支理论即其中之一类．下面我们将用实例来加以说明。

哈那克定理得到最多的分立封闭分支的最大数目

$$N(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1, & \text{当 } n=\text{偶数},\\ \frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1, & \text{当 } n=\text{奇数}.\end{cases}$$

当 $n=4$ 时，$N(n)=4$，即最多有 4 条分立封闭分支。当达到四条时，显然没有套环的可能性，否则至少可以作一直线使与它们相交于六点，即至少为 6 次代数曲线。由此可见，它们将互不相包。

要具体造出四个分立封闭互不相包的代数曲线的例子，可以用参数变易法如下：

先取两个相交的椭圆，例如

$$x^2+3y^2-4=0,\qquad 3x^2+y^2-4=0.$$

则四次代数曲线

$$F_4\equiv(x^2+3y^2-4)(3x^2+y^2-4)=0$$

的闭分支是不分立的。下面作微小变易

$$G_4=F_4+0.1(x^2+y^2)=0,$$

则这些相联的闭曲线破开为四条互不相包的封闭曲线，如图3所示：

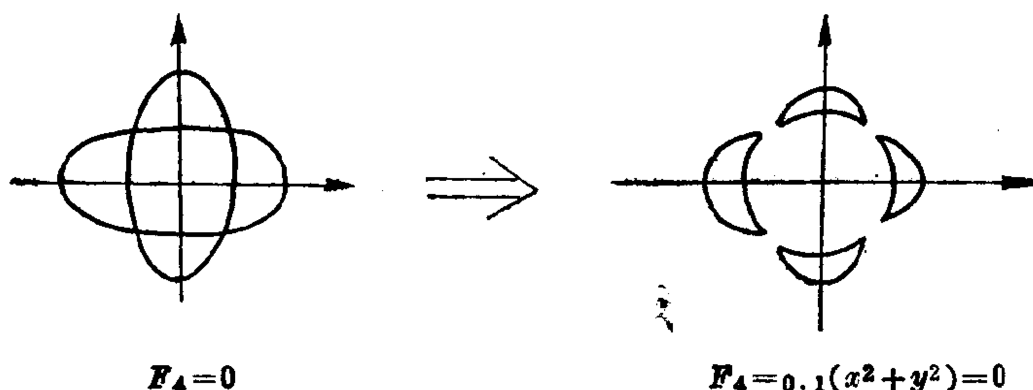


图 3

从微分方程的角度来看，主要是研究产生极限环的突变性。这主要从两方面来研究，一种是对于有根的曲面，研究它们的根由结点变为焦点时，从没有孤立极限曲面变到孤立极限曲面，再研究它们与实平面的切迹；这样，便由孤立极限曲面的数目及性质来加以控制。另一种是从高阶焦点跳出极限环的可能性，这些都已分别在第二篇及第三篇中讨论过。

第三种主要方法是利用解析函数的良好性质，解析函数能由局部决定全局，这至少从黎曼时已经知道了的。当时是利用解析延拓，由局部拓展到全局。但是这只是理论上的办法，对于具体的方程难于应用。现在在若干特殊情形下，系统有显式的解析积分，因此，也就可以明确地得到曲面与奇点的联系，例如由显式的解析解得到强有根性；以这样的类型为基础变动参数，则可研究强有根性的保持问题，从而使全局关系得到控制。

第四种主要的方法是利用计算机作为辅助工具。计算机可以作严格计算和近似计算两种用途.在严格计算方面，例如焦点量公式的严格推导，由高阶焦点跳出极限环的具体实现中参数的选取

与严格论证，这些都是工作中必不可少的部分，这将在附录 1 与附录 2 中加以简述。另一方面，利用计算机对于四维空间中的二维曲面族作近似计算，从而发现若干性质，例如“根”的位置，当 θ 固定所得的四维空间中曲线族的某个奇点对 $r\to\infty$ 是渐近稳定时，近似计算中的误差一般不会影响曲线走向这一奇点的性质；这样，近似计算就为精确证明提供参考和协助形成概念。总之，计算机的作用对于加速问题的解决是十分重要的，否则工作可能停滞不前。(E_2) 全参数系统的焦点量公式拖延了近百年，就是一个明证。

第五种方法是李群的概念的推广.在实域微分方程的研究中，将解曲线族变为解曲线族的变换形成一个单参数的群，这便是李群的原始思想.在李群下的不变曲线占有特殊的地位.事实上极限环就是在李群下的一种不变曲线。现在推广到复域，这就需要推广到解曲面族以及两参数的变换群.极限环作为孤立极限积分曲线，其推广则为孤立极限积分曲面；这样便要研究在两参数的变换群下的不变的积分曲面，而孤立极限积分曲面是这类不变的积分曲面中的一种.从这一种观点出发，人们还将进一步研究通解的“解析定性”结构，亦即通解由多少个因子所组成，每个因子的特性如何等等，这是一门急待重新发展的分支学科。

将上述五种方法有机地配合使用，这样，我们便可以开始进攻希尔伯特第十六问题。

§3. 结果一例 $N(2)=4$ 并具 (1,3) 结构

作为上述理论的具体成果，我们举出下面的定理。

定理 1.1 对于实域的二次微分方程系统

$$\frac{du}{dt}=U_2(u,x), \qquad \frac{dx}{dt}=X_2(u,x), \qquad (E_2)$$

最多可有四条极限环，即

$$N(2)=4.$$

并且，当达到最大条数时，它们的分布必为(1，3)结构。即一个单的环和一串三个套环的结构。用记号可以写成

$$(1)+(1\supset 1\supset 1).$$

定理的证明将经过一系列的步骤来实现。

第二章　具有三阶细焦点的二次系统

§1.　问题的简化

一般的实域二次系统

$$\frac{du}{dt}=\sum_{0\leq j+k\leq 2} a_{jk}u^jx^k,\quad \frac{dx}{dt}=\sum_{0\leq j+k\leq 2} b_{jk}u^jx^k, \tag{2.1}$$

有 12 个实参数 a_{jk}, b_{jk}.

经过有六个任意参数的非奇异的线性变换

$$\xi=\alpha u+\beta x+\gamma,\quad \eta=\delta u+\varepsilon x+\zeta \tag{2.2}$$

可以省去(2.1)的六个参数。特别具有焦点的系统可以化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=-\eta+\lambda\xi+l\xi^2+m\xi\eta+n\eta^2,\\ \dfrac{d\eta}{dt}=\xi(1+a\xi+b\eta).\end{cases} \tag{2.3}$$

这里有六个任意参数 λ, l, m, n, a, b.

这里 $\xi=\eta=0$ 是一个焦点或中心。

$n\neq0$ 时，$\xi=0$ 上还有一个奇点 $\xi=0$，$\eta=\dfrac{1}{n}$. 当 $n\to0$,这个奇点走向∞处，故 $n=0$ 可看作 $n\neq0$ 的极限。

因此，以下设 $n\neq0$. 用 $n\xi, n\eta$ 代 ξ, η，则可将 η^2 的系数化为 1，这样又可减少一个参数 n，得到如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=-\eta+\lambda\xi+l\xi^2+m\xi\eta+\eta^2,\\[2mm]\dfrac{d\eta}{dt}=\xi(1+a\xi+b\eta),\end{cases}\tag{2.4}$$

这里只有五个任意参数 λ, l, m, a, b。

进一步设 $\xi=\eta=0$ 为三阶细焦点，即要求

$V_1=\lambda=0$,

$V_3=m(l+1)-a(b+2l)=0$,

$V_5=(m-5a)[am(2l+b+1)-(b+2l)(l+1)(b+1)]=0$,

$V_7=-a(2a^2+2+l)[am(2l+b+1)-(b+2l)(l+1)(b+1)]\neq 0$.

则有 $\lambda=0,\qquad m=5a,\qquad b=3l+5$。 (2.5)

$$a\neq 0,\quad 2a^2+2+l\neq 0,\quad a^2(5l+6)-3(l+1)^2(l+2)\neq 0。\tag{2.6}$$

$a\neq 0$，如用 $(-\xi,-t)$ 代 (ξ,t) 可将 a 反号。因此，以下设 $a>0$。由此，(2.4)化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=-\eta+l\xi^2+5a\xi\eta+\eta^2,\\[2mm]\dfrac{d\eta}{dt}=\xi(1+a\xi+(3l+5)\eta).\end{cases}\tag{2.7}$$

这里只有两个参数 (a,l) 了，并且 $a>0$。

现在将 (u,x) 代 (ξ,η)，则具有三阶细焦点的 (E_2) 系统的典型方程可以写成

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-x+lu^2+5aux+x^2,\\[2mm]\dfrac{dx}{dt}=u(1+au+(3l+5)x).\end{cases}\tag{2.8}$$

并有条件

$$a>0,\quad 2a^2+2+l\neq 0,\quad a^2(5l+6)-3(l+1)^2(l+2)\neq 0。\tag{2.9}$$

本章便是研究这种类型。

§2. 中心类型的强有根性

对于系统(2.8)，进一步命 $a=0$，则得系统

$$\frac{du}{dt}=-x+lu^2+x^2,\quad \frac{dx}{dt}=u(1+(3l+5)x). \tag{2.10}$$

这里只有一个参数 l. 将(2.10)中 dt 消去，则得 u^2 的线性方程，故有显式积分如下形：

$$F_0(u,x;l)=\text{const}\cdot[F_1(u,x;l)]^{k(l)}. \tag{2.11}$$

这里 F_0,F_1,k 具体列表如下：

l	$k(l)$	$F_0(u,x;l)$	$F_1(u,x;l)$
$\neq 0,-\frac{3}{5},-\frac{5}{2},-5$	$\frac{2l}{3l+5}$	$u^2-\frac{x^2}{(2l+5)}+\frac{4(l+3)x}{(2l+5)(l+5)}+\frac{2(l+3)}{l(2l+5)(l+5)}$	$1+(3l+5)x$
0	0	$u^2-\frac{x^2}{5}+\frac{12}{25}x-\frac{12}{125}\ln(1+5x)$	$1+5x$
$-\frac{5}{3}$	1	$u^2-\frac{3}{5}x^2+\frac{24}{25}x-\frac{36}{125}$	$e^{-\frac{10}{3}x}$
$-\frac{5}{2}$	2	$u^2+\frac{16}{125}\left(1-\frac{5}{2}x\right)^2\ln\left(1-\frac{5}{2}x\right)-\frac{8}{125}\left(1-\frac{5}{2}x\right)+\frac{12}{125}$	$1-\frac{5}{2}x$
-5	1	$u^2+\frac{2}{10^3}(1-10x)^2+\frac{16}{10^3}\ln(1-10x)+\frac{18}{10^3}$	$1-10x$

即 $l=0,\ -\frac{5}{3},\ -\frac{5}{2},\ -5$ 为变性点。

系统 (2.10) 一般有七个奇点， 四个有限奇点，三个无限奇点。

在 $u=0$ 上的两个有限奇点记作$P_1(0,0)$，$P_2(0,1)$；在 $1+(3l+5)z=0$ 上的两个有限奇点，记作 $P_3(w_3,z_3)$，$P_4(w_4,z_4)$，则

$$z_3=z_4=\frac{-1}{3l+5},$$

$$w_3=\sqrt{\frac{-3(l+2)}{l(3l+5)^2}},\quad w_4=-\sqrt{\frac{-3(l+2)}{l(3l+5)^2}}.$$

在无限远处的三个奇点，可由

$$\frac{w}{z}=\frac{lw^2+z^2}{w(3l+5)z}$$

即 $z[(2l+5)u^2-z^2]=0$ 解出，即

$$\begin{array}{ll} P_5(1:0:0) & \text{实点，} \\ \left.\begin{array}{l} P_6(1:\ \sqrt{2l+5}:0) \\ P_7(1:-\sqrt{2l+5}:0) \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{l} l>-5/2\text{为实点，} \\ l<-5/2\text{为虚点。} \end{array}\right. \end{array}$$

下面对这七个奇点进行研究。

$P_1(0,0)$恒为实中心，以大写C记，大写表示为实奇点。

$P_2(0,1)$附近的雅可比为

$$\begin{vmatrix} 2lu & -1+2x \\ 1+(3l+5)x & (3l+5)x \end{vmatrix}_{\substack{u=0\\x=1}}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3(l+2) & 0 \end{vmatrix}=-3(l+2).$$

由此知

$l<-2$ 为实中心，以C记，

$l>-2$ 为实鞍点，以S记。

P_3及P_4处的雅可比为

$$\begin{vmatrix} 2lw & -1+2z \\ 1+(3l+5)z & (3l+5)w \end{vmatrix}_{\substack{(w_3,z_3)\\(w_4,z_4)}}=\begin{vmatrix} 2lw_j & -1+2z_j \\ 0 & (3l+5)w_j \end{vmatrix}_{j=3,4}$$

故有 $\lambda_1=2lw_{3,4}$，$\lambda_2=(3l+5)w_{3,4}$，

$\Lambda = -\lambda_1/\lambda_2 = -\dfrac{2l}{3l+5}$ 为实数。

故可有下表：

l	Λ	P_3, P_4 的性质	记号
$l<-2$	$\Lambda<0$	复的结点	n, n
$-2<l<-5/3$	$\Lambda<0$	实的结点	N, N
$-5/3<l<0$	$\Lambda>0$	实的鞍点	S, S
$0<l$	$\Lambda<0$	复的结点	n, n

关于∞点，利用

$$w=1/\xi,\quad z=\eta/\xi,\quad dT=d\tau/\xi^2,$$

则可化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{d\tau}=-\xi(l-\xi\eta+\eta^2), \\ \dfrac{d\eta}{d\tau}=\xi+(2l+5)\eta+\xi\eta^2-\eta^3. \end{cases} \tag{2.12}$$

奇点在 $\xi=0$, $\quad (2l+5)\eta-\eta^3=0$。

$P_5(0,0)$, $P_6(0, \sqrt{2l+5})$, $P_7(0, -\sqrt{2l+5})$。

在奇点的雅可比有

$$\left|\begin{matrix} -l-2\xi\eta-\eta^2, & -\xi+\xi^2 \\ 1+\eta^2, & 2l+5+2\xi\eta-3\eta^2 \end{matrix}\right|_{\substack{\xi=0\\ \eta}} = \left|\begin{matrix} -l-\eta^2, & 0 \\ 1+\eta^2, & (2l+5)-3\eta^2 \end{matrix}\right|,$$

故 $\lambda_1=-l-\eta^2$, $\lambda_2=(2l+5)-3\eta^2$;

$$\Lambda=-\lambda_1/\lambda_2=(l+\eta^2)/(2l+5-3\eta^2)$$

为实数。

在 P_5 处，$\eta=0$, $\quad \Lambda=\dfrac{l}{2l+5}$.

故当 $0<l$，或 $l<-5/2$，P_5 为实鞍点，记作 S. 而当 $-5/2<l<0$，P_5 为实结点，记作 N。

在 P_6 及 P_7 处，$\eta^2=2l+5$，$\Lambda=\frac{3l+5}{-2(2l+5)}$.

故

$$-\frac{5}{3}<l,\ \Lambda<0,\ P_6,P_7 \text{ 为实结点 } N,N.$$

$$-\frac{5}{2}<l<-\frac{5}{3},\ \Lambda>0,\ P_6,P_7 \text{ 为实鞍点 } S,S.$$

$$l<-\frac{5}{2},\ \Lambda<0,\ P_6,P_7 \text{ 为复结点 } n,n.$$

总结可以得到

定理 2.1 系统(2.10)的自然扩展复系统

$$\frac{dw}{dT}=-z+lw^2+z^2,\quad \frac{dz}{dT}=w(1+(3l+5)z).\qquad (2.10^*)$$

依 l 值而被化为五区，分界点在 $l=0,-5/3,-2,-5/2$. 在这五区中奇点组的性质各异，列表如下：

l	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
$l<-5/2$	C	C	n	n	S	n	n
$-5/2<l<-2$	C	C	n	n	S	N	S
$-2<l<-5/3$	C	S	N	N	S	N	S
$-5/3<l<0$	C	S	S	S	N	N	N
$0<l$	C	S	n	n	S	N	N

进一步有

定理 2.2 上述五区中，积分曲面均过奇点，即系统(2.10*)具强有根性。更具体地说：当 $k(l)>0$，则曲面均过 P_3 及 P_4，而当 $k(l)<0$，则曲面均过 P_5,P_6,P_7 之一。

证明 当 $k(l)>0$，即 $\frac{2l}{3l+5}>0$，即 $l>0$ 或 $l<-5/3$，则所有积分曲面

$$F_0(u,x;l)=\text{const}\cdot[F_1(u,x;l)]^{k(l)}$$

均过 $F_0(u,x;l)=0$ 与 $F_1(u,x;l)=0$ 之交点，即 P_3 与 P_4。

当 $k(l)<0$，即 $\frac{2l}{3l+5}<0$，即 $-5/3<l<0$，

通解

$$F_0(w,z;l)=\text{const}\cdot[F_1(w,z;l)]^{k(l)}$$

中以 $w=1/\xi$，$z=\eta/\xi$ 代入，双方并乘以 ξ^2，则有

$$\left\{1-\frac{\eta^2}{(2l+5)}+\frac{4(l+3)\xi\eta}{(2l+5)(l+5)}+\frac{2(l+3)}{l(2l+5)(l+5)}\xi^2\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\xi+(3l+5)\eta\right\}^{-k(l)}=\text{const}\cdot\xi^{2-k(l)}.$$

由于 $k(l)<0$，故 $-k(l)>0$，$2-k(l)>0$。因此，当 const $\neq 0$，则积分曲面过 P_5,P_6 及 P_7 三者。而当 const$=0$，则积分曲面过 $P_5P_6P_7$ 三者之一。

由此得到所有曲面过 P_5,P_6,P_7 之一。

定理 2.2 证毕。

这些与全局相联系的奇点组，简称为控制奇点组。对于这五区，有下表：

l	控制组	类型
$l<-5/2$	P_3　　P_4	n　n
$-5/2<l<-2$	P_3　　P_4	n　n
$-2<l<-5/3$	P_3　　P_4	N　N
$-5/3<l<0$	P_5　P_6　P_7	N　N　N
$0<l$	P_3　　P_4	n　n

注意，这里表明，实曲线经过复曲面而与控制奇点相联系。

定理 2.3　当 $l=0$，$-5/3$，$-5/2$，-5，-2，时系统(2.10*)具有强有根性。

证明 分别加以验证。

$l=-5/2$ 两侧均由 (P_3, P_4) 控制组(n,n)加以控制，故 $l=-5/2$ 亦如此。也可直接验证

$$w^2+\frac{16}{125}(1-2.5z)^2\ln(1-2.5z)-\frac{8}{125}(1-2.5z)$$

$$+\frac{12}{125}=C(1-2.5z)^2.$$

将 $1-2.5z\to 0^+$，　则 $w^2+\frac{12}{125}\longrightarrow 0$。

对任何 $C\neq\infty$，即过 P_3 与 P_4 点。

当 $C=\infty$，则有 $1-2.5z=0$，也过 P_3 与 P_4 点，故 P_3, P_4 为控制奇点组。

$l=-5$，直接验证如下：

$$w^2+\frac{2}{10^3}(1-10z)^2+\frac{16}{10^3}\ln(1-10z)$$

$$+\frac{18}{10^3}\text{const}\cdot(1-10z).$$

以 $w=1/\xi$，$z=\eta/\xi$ 代入，有

$$1+\frac{2}{10^3}(\xi-10\eta)^2+\frac{16}{10^3}\xi^2[\ln(\xi-10\eta)-\ln\xi]$$

$$+\frac{18}{10^3}\xi^2=C(\xi^2-10\xi\eta).$$

对任何 C，当 $\xi\to 0^+$，$\eta\to\pm i\sqrt{5}$，上式成立，即积分曲面过 P_6 与 P_7。

$l=-5/3$ 直接验证如下：

$$w^2-\frac{3}{5}z^2+\frac{24}{25}z-\frac{36}{125}=C\cdot e^{-\frac{10}{3}z}.$$

取 $z=\dfrac{\sqrt{5/3}}{\xi}$，　$\text{Re}(\xi)>0$，　$\xi\to 0$，

$w=\eta/\xi$，则有

$$\eta^2-1+\frac{24}{25}\sqrt{\frac{5}{3}}\xi-\frac{36}{125}\xi=\xi^2 Ce^{-\frac{10}{8}\frac{\sqrt{\frac{5}{8}}}{\xi}}.$$

当 $\mathrm{Re}(\xi)>0,\xi\to 0$，则 $e^{-\frac{10}{8}\frac{\sqrt{\frac{5}{8}}}{\xi}}\longrightarrow 0$，故 $\eta^2-1\to 0$，即 $\eta\to\pm 1$。故积分曲面过 $(1:\pm 1:0)$ 即 P_6 与 P_7。

关于 $l=0$，直接验证如下：

$$w^2-\frac{1}{5}z^2+\frac{12}{25}z-\frac{12}{125}\ln(1+5z)=C\ .$$

当 $C=\infty$，即 $1+5z=0$，故过 P_5。

当 $C\neq\infty$ 取 $z=\frac{\pm\sqrt{5}}{\xi}$，$w=\frac{\eta}{\xi}$，则有

$$\eta^2-1+\frac{12}{25}\sqrt{5}\xi-\frac{12}{125}\xi^2[\ln(\xi\pm 5\sqrt{5})-\ln\xi]=C\xi^2.$$

当 $\xi\to 0$，则 $\eta^2-1\to 0$ 即 $\eta\to\pm 1$。故积分曲面而过 $(w:z:1)=(1:\pm\sqrt{5}:0)$，亦即曲面过 P_6 及 P_7。

$l=-2$，则 $k(l)=4$，故积分曲面过 P_3 与 P_4。

总结可得

定理 2.4 对任何 l，系统(2.10*)具有强有根性。

§3. (a^2,l)参数平面上的变性线

在前节已研究了 $a=0$ 时的情况；现在要研究 $a\neq 0$ 的情况。这样我们就要涉及(a^2,l)参数平面。

具有三阶细焦点的系统，由第一节已知可以化为

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-x+lu^2+5aux+x^2,\\[2mm]\dfrac{dx}{dt}=u(1+au+(3l+5)x),\end{cases}\tag{2.8}$$

并且可有条件

$$a>0,\qquad 2a^2+2+l\neq 0,$$
$$a^2(5l+6)-3(l+1)^2(l+2)\neq 0.\tag{2.9}$$

即 $V_1=V_3=V_5=0$。而

$$V_7=-a(2a^2+2+l)[a^2(5l+6)-3(l+1)^2(l+2)]\neq 0.$$

下面对七个奇点性质的改变，逐个加以研究。

$P_1(0,0)$ 在 $V_7\neq 0$ 时为三阶细焦点，而在 $V_7=0$ 时为中心，故当下三式之一满足时，

$$a=0 \tag{2.13}$$

$$2a^2+2+l=0 \tag{2.14}$$

$$a^2(5l+6)-3(l+1)^2(l+2)=0 \tag{2.15}$$

为中心。

当参数通过这三条线时，V_7 变号，即三阶细焦点的稳定性性质变号。由于它是通过中心过渡的，因此，并不跳出极限环。

$P_2(0,1)$的雅可比为

$$\begin{vmatrix} 2lw+5az, & -1+5aw+2z \\ 1+2aw+(3l+5)z, & (3l+5)w \end{vmatrix}_{(0,1)}=\begin{vmatrix} 5a, & 1 \\ 3(l+2), & 0 \end{vmatrix},$$

$$\lambda^2-5a\lambda-3(l+2)=0.$$

故有两条变性线

$$l=-2 \tag{2.16}$$

及

$$25a^2+12(l+2)=0. \tag{2.17}$$

当 $25a^2+12(l+2)<0$ 时，P_2 为焦点；

当 $25a^2+12(l+2)>0$，$l<-2$ 时，P_2 为结点；

当 $l>-2$ 时，P_2 为鞍点。

故(2.16)是鞍点与结点的分界线，(2.17)是结点与焦点的分界线。

下面研究 $1+aw+(3l+5)z=0$ 上的两奇点 $P_3(w_3,z_3)$及 $P_4(w_4,z_4)$。

$$w_{3,4}=\frac{3a(2l+3)\pm(3l+5)\sqrt{3[3a^2-l(l+2)]}}{l(3l+5)^2-a^2(15l+24)},$$

$$z_{3,4}=\frac{3a^2-l(3l+5)\mp a\sqrt{3[3a^2-l(l+2)]}}{l(3l+5)^2-a^2(15l+24)};$$

这里有两条变性线，即

$$3a^2-l(l+2)=0 \tag{2.18}$$

及

$$l(3l+5)^2-a^2(15l+24)=0。\tag{2.19}$$

当 $3a^2-l(l+2)<0$，则$(w_{3,4},\ z_{3,4})$为复奇点；

当 $3a^2-l(l+2)\geqslant 0$，则$(w_{3,4},\ z_{3,4})$为实奇点。

因此(2.18)是复奇点汇合为实奇点的参数线。

对于(2.19)则是 P_3，P_4 之一走向∞处，与∞处奇点相汇合之线。

在 $3a^2-l(l+2)<0$ 时，可证明 P_3，P_4 均为复焦点。

这主要需要计算 $\mathrm{Im}(\varLambda)$。

以 P_3 为例，有雅可比

$$\begin{vmatrix} 2lw+5az, & -1+2z+5aw \\ 1+2aw+(3l+5)z, & (3l+5)w \end{vmatrix}_{P_3}$$

$$=\begin{vmatrix} 2lw_3+5az_3, & 6aw_3+(3l+7)z_3 \\ aw_3, & (3l+5)w_3 \end{vmatrix},$$

$$\lambda^2-5((1+l)w_3+az_3)\lambda+2w_3\sqrt{3(3a^2-l(l+2))}=0.$$

记 $p=-5((1+l)w_3+az_3)$， $q=2w_3\sqrt{3(3a^2-l(l+2))}$.

如果 $\varLambda=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$为实数，则

$$p^2\bar{q}=(q\bar{q})\left(\frac{p^2}{q}\right)=(q\bar{q})\ \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{\lambda_1\lambda_2}=(q\bar{q})\ \left(2+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$$

$$=(q\bar{q})\left(2+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{1}{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}\right)$$

也是实数。

因此，只要 $p^2\bar{q}$ 不为实数，则 $\mathrm{Im}(\varLambda)\neq 0$。

当 $3a^2-l(l+2)<0$，可以直接算出

$$\operatorname{Im}(p^2\bar{q})=3a[2a^2+l+2][(15l+24)a^2-l(3l+5)^2]\times[3a^2-(l+1)(5l+9)].$$

$a=0$ 及 $2a^2+l+2=0$ 均为中心条件，此时 P_3,P_4 为结点。

当 $3a^2-l(l+2)<0$，则

$$3a^2-(l+1)(5l+9)<l(l+2)-(l+1)(5l+9)=-(2l+3)^2\leqslant 0,$$

故 $3a^2-(l+1)(5l+9)\neq 0$。

当 $3a^2-l(l+2)<0$，则 $l>0$ 或 $l<-2$。

当 $l>0$，$15l+24>0$，

$$(15l+24)a^2-l(3l+5)^2<(15l+24)\frac{l(l+2)}{3}-l(3l+5)^2=-l(2l+3)^2<0;$$

而当 $l<-2$，$15l+24<0$，

$$(15l+24)a^2-l(3l+5)^2>(15l+24)\frac{l(l+2)}{3}-l(3l+5)^2=-l(2l+3)^2>0.$$

故 $3a^2-l(l+2)<0$，则 $(15l+24)a^2-l(3l+5)^2\neq 0$。

由此知，当 P_1 不为中心，P_3,P_4 为复奇点时，P_3,P_4 必为焦点。

当 $2a^2+2+l=0$ 时，可以直接算出 P_3 处有

$$\lambda^2+\frac{5}{2}\frac{a(1+\sqrt{3(1+4a^2)}\,i)}{1+3a^2}\lambda+\frac{3}{2}\frac{a^2(1+\sqrt{3(1+4a^2)}\,i)}{(1+3a^2)^2}=0,$$

$$\lambda_1=-\frac{3}{2}\frac{a(1+\sqrt{3(1+4a^2)}\,i)}{1+3a^2},$$

$$\lambda_2=-\frac{a(1+\sqrt{3(1+4a^2)}\,i)}{1+3a^2},$$

$$\Delta=-\lambda_1/\lambda_2=-3/2<0.$$

故 P_3 为结点。同理 P_4 为结点。

下面研究∞处奇点的性质：

由(2.8)以

$$w=1/\xi,\ z=\eta/\xi,\ d\tau=dt/\xi$$

代入，有

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{d\tau}=\xi(-l-5a\eta+\xi\eta-\eta^2),\\ \dfrac{d\eta}{d\tau}=a+\xi+(2l+5)\eta-5a\eta^2+\xi\eta^2-\eta^3.\end{cases}\tag{2.20}$$

∞奇点在 $\xi=0$ 及 η 满足

$$f(\eta)\equiv a+(2l+5)\eta-5a\eta^2-\eta^3=0.\tag{2.21}$$

(2.21)由一定根变为三实根之条件为

$$\Delta\equiv500a^4+[25(2l+5)^2+90(2l+5)-27]a^2+4(2l+5)^3=0\tag{2.22}$$

当 $\Delta<0$ 时，只有一实根；

当 $\Delta>0$ 时，有三实根。

$\Delta=0$ 时为两复根重合为一实根的过渡情形，即两复根重合为一实根，再分解为一实结点和一实鞍点；另一实根之性质可直接计算，也可由指数定理加以决定。

∞处奇点还有一个变性点，即 P_3，P_4 之一走向∞处时，与一∞处奇点相重合，然后再分开以便改变性质，这条变性线在(2.19)。

现在，除了 P_1 变性线(2.13)(2.14)(2.15)之外，P_2 的变性线(2.16)及(2.17)，P_3,P_4 的变性线(2.18)(2.19)，∞奇点之变性线(2.22)(及(2.19))将(a^2, l)参数平面划分为十块，我们得到十种不同的拓扑结构，这十块区域的标号用罗马数字Ⅰ到Ⅹ作为标号。标号的原则是，按 l 小的排在前面。具体排法是：

在 $l<-2$ 区中，以 $a^2=1$ 上的点的 l 从小到大，排列为Ⅰ至Ⅴ区。在 $l>-2$ 区中，以 $a^2=0.1$ 上的点的 l 从小到大排列为Ⅵ到Ⅹ区。

总结可得

定理 2.5 具有三阶细焦点的 (E_2) 的自然扩展系统 (E_2^*) 可以化为

$$\begin{cases} \frac{dw}{dT} = -z + lw^2 + 5awz + z^2, \\ \frac{dz}{dT} = w(1 + aw + (3l+5)z), \end{cases} \tag{2.8*}$$

其中 $a>0$，$2a^2+2+l\neq0$，$a^2(5l+6)-3(l+1)^2(l+2)\neq0$。由

$$l=-2, \tag{2.16}$$

$$25a^2+12(l+2)=0, \tag{2.17}$$

$$3a^2-l(l+2)=0, \tag{2.18}$$

$$l(3l+5)^2-a^2(15l+24)=0, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} \Delta \equiv\, & 500a^4+[25(2l+5)^2+90(2l+5)-27]a^2 \\ & +4(2l+5)^3=0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

将参数 (a^2, l) 平面分割为十区，每区的系统的七个奇点 $P_j(j=1,2,\cdots,7)$ 组成的组的性质各不相同，具体地有

区号	奇	点					
Ⅰ	$F^{(3)}$	$F^{(0)}$	f	f	S	f	f
Ⅱ	$F^{(3)}$	$F^{(0)}$	f	f	S	N	S
Ⅲ	$F^{(3)}$	N	f	f	S	N	S
Ⅳ	$F^{(3)}$	N	N	S	S	N	S
Ⅴ	$F^{(3)}$	N	S	S	N	N	S
Ⅵ	$F^{(3)}$	S	N	N	S	N	S
Ⅶ	$F^{(3)}$	S	S	N	N	N	S

区号	奇 点						
Ⅷ	$F^{(3)}$	S	S	S	N	N	N
Ⅸ	$F^{(3)}$	S	N	S	N	S	N
Ⅹ	$F^{(3)}$	S	f	f	N	S	N

$2a^2+l+2=0$ 在Ⅲ区中，奇点组为

$$CNnnSNS.$$

$a^2(5l+6)-3(l+1)^2(l+2)=0$ 对于 $a^2>0$ 有三个 l 值， l 最小的一支在Ⅳ区中，奇点组为

$$CNNSSNS,$$

l 大的两支在Ⅷ区中，奇点组为

$$CSSSNNN.$$

全局情况见(a^2, l)参数平面图（图 4 ）。

§4. Ⅰ区的研究

对于希尔伯特第 16 问题而言，Ⅰ区是最重要的区域。这区的特点是，(E_2)具有一个三阶细焦点 $P_1(0,0)$，以及唯一的一个实∞奇点 P_5。

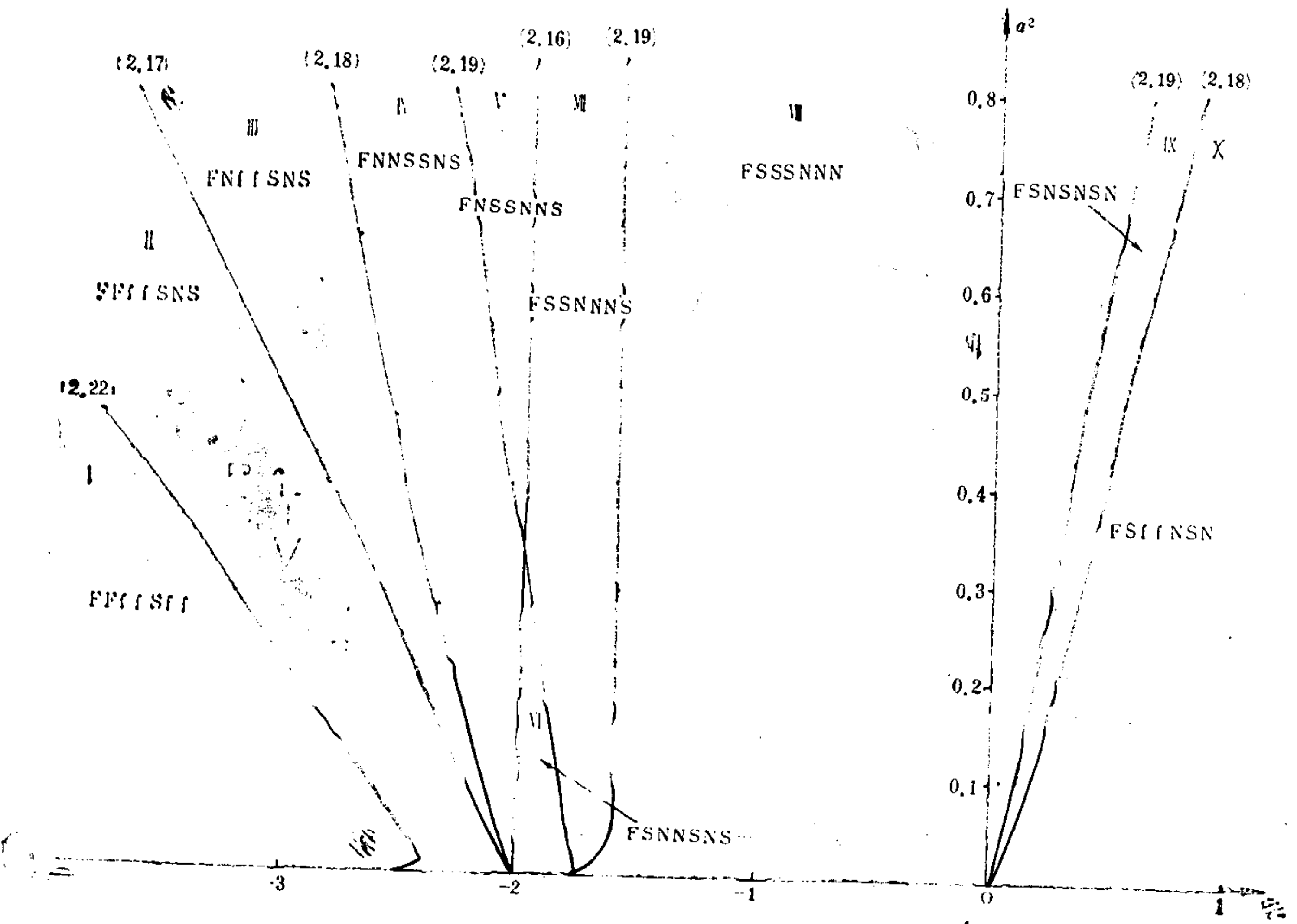
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-x+lu^2+5aux+x^2, \\ \dfrac{dx}{dt}=u(1+au+(3l+5)x). \end{cases} \tag{2.8}$$

条件为

$$\Delta=500a^4+[25(2l+5)^2+90(2l+5)-27]a^2 \\ +4(2l+5)^3<0 \tag{2.23}$$

以及 $a>0$。

由 $\Delta=0$ 可解出



a^2
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
-1
-2
-3
(2.17)
(2.18)
(2.19)
(2.16)
(2.19)
(2.22)
(2.19)
(2.18)
X
FNNSSNS
FNSSNNS
FSSNNNS
FSSSNNN
FSNSNSN
FSNNSNS

图 4 (a^2, l)参数平面图

$$a^2=\frac{1}{1000}[108-(5(2l+5)+9)^2\pm$$

$$\pm\sqrt{(5(2l+5)-1)(5(2l+5)-9)^3}].$$

当 $(5(2l+5)-1)(5(2l+5)-9)<0$, a^2 为复数，故只有 $(5(2l+5)-1)(5(2l+5)-9)\geqslant 0$，即

$$5(2l+5)\geqslant 9 \text{ 或 } 5(2l+5)\leqslant 1.$$

而 $5(2l+5)\geqslant 9$ 时，$a^2<0$，故只要研究

$$5(2l+5)\leqslant 1, \text{ 即 } l\leqslant -2.4.$$

在 $-2.5<l<-2.4$ 中 a^2 有两正实根。

$l=-2.4$ 有一重实根。

$l=-2.5$ 有 $a^2=0$ 及 $a^2=0.054$。

$l<-2.5$ 则 a^2 只有一正实根

$$a^2=\frac{1}{1000}[108-(5(2l+5)+9)^2$$

$$+\sqrt{(5(2l+5)-1)(5(2l+5)-9)^3}].$$

下面要验证，在 $\Delta<0$ 中，没有变性线(2.14)，(2.15)，(2.16)，(2.17)，(2.18)，(2.19)。其推导次序为，由 $\Delta<0$ 推出

$$25a^2+12(l+2)<0,$$

即排除(2.17)。由此不等式推出

$$2a^2+2+l<0,$$

$$l<-2,$$

$$3a^2-l(l+2)<0.$$

这便排除了(2.14)，(2.16)及(2.18)。

由最后两式导出

$$l(3l+5)^2-a^2(15l+24)<0,$$

这便排除了(2.19)。由最后一式导出

$$a^2(5l+6)-3(l+1)^2(l+2)>0,$$

这便排除了(2.15)。

下面依次进行推导:

$$0>\Delta\equiv\left[20a^2+\frac{2}{3}(2l+5)^2\right]\left[25a^2+12(l+2)\right]$$

$$+\frac{a^2}{3}\left[4(5l+8)^2+198\right]+\left[4(2l+5)^2\right],$$

故

$$25a^2+12(l+2)=\frac{1}{\left[20a^2+\frac{2}{3}(2l+5)^2\right]}\cdot$$

$$\cdot\left\{\Delta-\frac{a^2}{3}\left[4(5l+8)^2+198\right]-\left[4(2l+5)^2\right]\right\}<0\quad(\Delta<0),$$

故

$$a^2<-\frac{12}{25}(l+2),\qquad (l+2)<-\frac{25}{12}a^2.$$

由此

$$2a^2+2+l<2a^2-\frac{25}{12}a^2=-\frac{1}{12}a^2<0\ .$$

$$l<-2-2a^2<-2,\ \ l+2<0.$$

$$3a^2-l(l+2)<-\frac{36}{25}(l+2)-l(l+2)$$

$$=\frac{14}{25}(l+2)-(l+2)^2<0.$$

由 $l<-2$，故 $-(15l+24)>0$,

$$l(3l+5)^2-a^2(15l+24)$$

$$<l(3l+5)^2-(15l+24)\frac{1}{3}l(l+2)$$

$$=l(2l+3)^2<0,\qquad (l<-2).$$

这样，在Ⅰ区中，奇点没有变性问题。

它们依次为 $F^{(8)}F^{(0)}f\ f\ S\ f\ f$。

在实域中已经证明:

定理 无切直线 $L: 1+au+(3l+5)x=0$ 将平面分为左上半平面和右下半平面。左上半平面中有一个粗焦点 $P_2(0,1)$，它是

不稳定的，以及在∞处的半个鞍点，它的分界线向外走出，因此，在左上半平面有α个极限环，

$$\alpha=\text{奇数}\geqslant 1.$$

右下半平面中有一个不稳定的三阶细焦点$P_1(0,0)$，以及在∞处的半个鞍点，它的分界线走向奇点，因此在右下半平面有β个极限环，

$$\beta=\text{偶数}\geqslant 0.$$

总的极限环数为

$$N=\alpha+\beta=\text{奇数}\geqslant 1.$$

现在我们将从复域中进一步证明。

定理 2.6 设(E_2)有一个三阶细焦点及一个∞实奇点，则

$$\alpha=1,\ \beta=0,\ N=1.$$

证明 将(2.8)自然扩展为复系统(2.8*)我们来看极限环的最多个数N。

在Ⅰ区中，将$a\to 0$，则由$\Delta<0$，故有

$$4(2l+5)^3<0,$$

即$l<-2.5$。

由此得系统

$$\frac{dw}{dT}=-z+lw^2+z^2,\quad \frac{dz}{dT}=w(1+(3l+5)z),$$

$$l<-2.5.$$

则七个奇点为：

$$C\quad C\quad n\quad n\quad S\quad n\quad n.$$

所有的积分曲面均过P_3及P_4。

当a由0变为非零，仍在Ⅰ区中，则奇点组变为：

$$F^{(3)},F^{(0)},f,f,S,f,f.$$

这里P_3,P_4由n变为f，因此，与P_3及P_4相联的曲面，仍然保持与P_3、P_4相联。

但是，现在发生一个质变，即n没有孤立极限曲面，而f有孤立极限曲面，这样，最多有两张孤立极限曲面过P_3。已知当极限环与焦点相联时，必为孤立极限曲面，这样我们就可以由焦点的孤立极限曲面来追踪实极限环，也可以作实极限环来找它的"根"。

现在，已知$a\neq 0$时，$\alpha=$奇数$\geqslant 1$，我们将让$a\to 0$，来找出极限环从何处产生。

首先，当$a\neq 0$时，在焦点P_3附近，孤立极限积分曲面的方程可以用$(w-w_3)$及$(z-z_3)$的幂级数展开求得

$$F\equiv A(w-w_3)+B(z-z_3)+\cdots,$$

即由

$$\frac{dF}{dT}=\lambda F$$

求出，这里在P_3附近，

$$\frac{d(w-w_3)}{dT}=\alpha(w-w_3)+\beta(z-z_3)+\cdots,$$

$$\frac{d(z-z_3)}{dT}=\gamma(w-w_3)+\delta(z-z_3)+\cdots,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix}=0\ ,\quad \lambda=\lambda_1,\lambda_2.$$

特别有

$$\frac{A}{B}=\frac{\gamma}{\lambda-\alpha}=\frac{\lambda-\delta}{\beta}.$$

当$a\to 0$时

$$w_3\to w_3^{(0)}=\sqrt{\frac{-3(l+2)}{l(3l+5)^2}}\ ,\quad z\to z_3^{(0)}=-\frac{1}{3l+5},$$

$$\alpha\to\alpha'^{(0)}=2lw_3^{(0)},\quad \beta\to\beta^{(0)}=(3l+7)z_3^{(0)},$$

$$\gamma\to\gamma^{0}=0,\quad \delta\to\delta^{(0)}=(3l+5)w_3^{(0)},$$

$$\lambda_1 \to \lambda_1^{(0)} = \alpha^{(0)} = 2lw_3^{(0)},\quad \lambda_2 \to \lambda_2^{(0)} = \delta^{(0)} = (3l+5)w_3^{(0)}.$$

对于 λ_1 则当 $a \to 0$

$$\frac{A}{B} \to \frac{A^{(0)}}{B^{(0)}} = \frac{\lambda_1^{(0)} - \delta^{(0)}}{\beta^{(0)}} = \frac{\alpha^{(0)} - \delta^{(0)}}{\beta^{(0)}} = +\frac{(l+5)}{(3l+7)}\sqrt{\frac{-3(l+2)}{l}}.$$

对于 λ_2 则当 $a \to 0$

$$\frac{A}{B} \to \frac{A^{(0)}}{B^{(0)}} = \frac{\gamma^{(0)}}{\lambda_2^{(0)} - \lambda_1^{(0)}} = \frac{0}{(l+5)w_3^{(0)}} = 0,$$

故可取 $A^{(0)} = 0$，$B^{(0)} \neq 0$。亦即出现对于 λ_2，当 $a \to 0$，

$$F \to F^{(0)} \equiv B^{(0)}(z - z_3^{(0)}) + \cdots = 0.$$

另一方面，当 $a \to 0$，积分曲面族为

$$F_0(w, z; l) = \text{const} \cdot [1 + (3l+5)z]^{k(l)},$$

$$k(l) = \frac{2l}{3l+5}.$$

$$F_0(w, z; l) \equiv w^2 - \frac{1}{2l+5}z^2 + \\ + \frac{4(l+3)}{(2l+5)(l+5)}z + \frac{2(l+3)}{l(2l+5)(l+5)}.$$

当 l 为无理数时，$k(l)$ 为无理数，

$$1 + (3l+5)z = (3l+5)(z - z_3^{(0)}),$$

由此，当 l 为无理数，$\text{const} \neq \infty$，0 时，这个通解不能展为 $(w - w_3^{(0)})$，$(z - z_3^{(0)})$ 的幂级数。因此，要成为幂级数，则只有 $\text{const} = \infty$，0，亦即

$$F_0(w, z; l) = 0$$

和

$$F_1(w, z; l) = 0.$$

结论是，当 l 为无理数时，极限环如果存在，则当 $a \to 0$，极限环的位置趋于

$$F_0(w, z; l) = 0$$

或

$$F_1(w,z;l)=0.$$

$$F_0(u,x;l)=u^2-\frac{1}{2l+5}\left(x-\frac{2(l+3)}{l+5}\right)^2+\frac{2(l+1)(l+3)}{l(l+5)^2}=0.$$

这个曲线的图形有显著变化：

当 $l>-2.5$，它是双曲线；

当 $-2.5>l>-3$，它无实轨迹；

当 $-3\geqslant l>-5$，它是绕 $P_1(0,0)$的椭圆；

当 $-5>l$，它是绕 $P_2(0,1)$的椭圆。

另一方面，当(a^2,l)在Ⅰ区中，$a^2\to 0$ 时，l 固定，则极限环有极限位置绕 $P_2(0,1)$，并且对 l 是连续的。由此可知，只有

$$F_1(w,z;l)=1+(3l+5)z=0$$

是极限环所在曲面的极限位置；亦即

$$F_1(u,x;l)=1+(3l+5)x=0$$

是极限环当 l 固定，$a\to 0$ 的极限位置。亦是可以得到当 l 固定，a 由 0 变成非零，但在Ⅰ区中时，则一个极限环由 $a=0$ 时的奇环跳出并且是绕 $P_2(0,1)$的，它相应于 $\lambda=\lambda_2$ 的孤立极限曲面。而相应于 $\lambda=\lambda_1$ 的孤立极限曲面，既不能形成绕 $P_1(0,0)$ 的极限环，因为$\beta=$偶数，又不能形成绕 $P_2(0,1)$的极限环，因为$\alpha=$奇数，已经有由 $\lambda=\lambda_2$ 来的一个环了．于是，即可得到极限环只由 $\lambda=\lambda_2$ 而来，并由奇环跳出来．由于 $\lambda=\lambda_1$ 不产生极限环，从而

$$\alpha=1,\ \beta=0,\ N=\alpha+\beta=1.$$

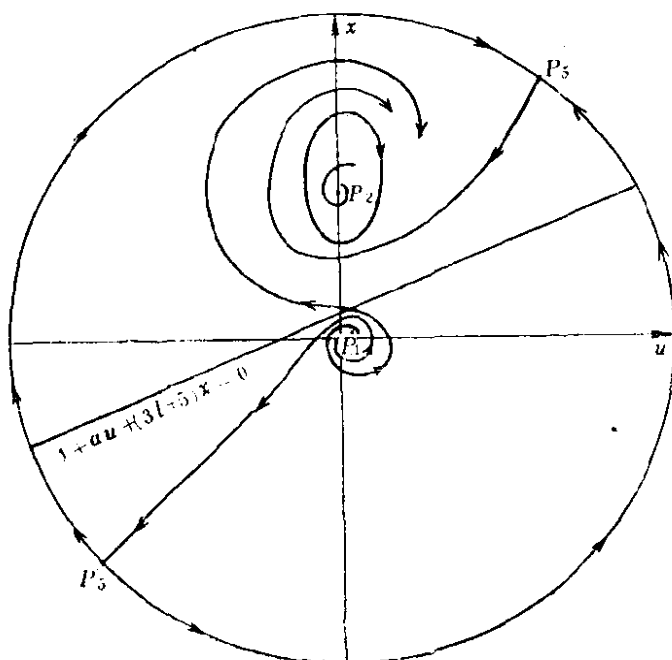
定理2.6证毕。

在Ⅰ区中之(a^2,l)的系统利用计算机计算极限环时，都得到

很大的环。

另一个证法是，在实域中，从 $u=0$，$x=\frac{-1}{3l+5}$点出发的轨线，当 $t\to+\infty$，趋于极限环；而无切直线 $1+au+(3l+5)x=0$ 当 $a\to 0$ 时，趋于奇环，这便是极限位置.

由于通过 P_3, P_4 的 f, f 出现极限环，因此有必要对过焦点的两极限曲面，作进一步的研究.



$$\begin{cases}\frac{du}{dt}=-x+lu^2+5aux+x^2\\ \frac{dx}{dt}=u(1+au+(3l+5)x)\end{cases}$$

$a>0$，$\Delta(a^2, l)<0$.

图 5　I 区全局轨线示意图

下面我们将证明一个有关套环的定理.

定理 2.7　在 I 区中过 P_3 的两极限曲面不能形成相套的极限环.

证明 用反证法。如果对某组参数 (a, l) 过 P_3 的两孤立极限曲面形成套环，即两个极限环相套，则通过实系统 (E_2) 的向量场的旋转，可使这两个极限环重合，从而使这两个极限曲面重合，亦即使 P_3 的特征根重合。具体计算如下：

在 $P_3(w_3, z_3)$ 附近的一次近似为

$$\xi = w - w_3,\quad \eta = z - z_3.$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dT} = (2lw_3 + 5az_3)\xi + (-1 + 5aw_3 + 2z_3)\eta + \cdots, \\ \dfrac{d\eta}{dT} = (1 + 2aw_3 + (3l+5)z_3)\xi + (3l+5)w_3\eta + \cdots. \end{cases}$$

利用 $1 + aw_3 + (3l+5)z_3 = 0$，又可化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dT} = (2lw_3 + 5az_3)\xi + (6aw_3 + (3l+\eta)z_3)\eta + \cdots, \\ \dfrac{d\eta}{dT} = aw_3\xi \qquad + (3l+5)w_3\eta \qquad + \cdots. \end{cases}$$

作向量场实旋转 Q，则得系统：

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dT} = [(2lw_3 + 5az_3)\cos\theta - aw_3\sin\theta]\xi + \\ \qquad + [(6aw_3 + (3l+7)z_3)\cos\theta - (3l+5)w_3\sin\theta]\eta + \cdots, \\ \dfrac{d\eta}{dT} = [(2lw_3 + 5az_3)\sin\theta + aw_3\cos\theta]\xi + \\ \qquad + [(6aw_3 + (3l+7)z_3)\sin\theta + (3l+5)w_3\cos\theta]\eta + \cdots. \end{cases}$$

为简化计，又写成

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dT} = A(\theta; a, l)\xi + B(\theta; a, l)\eta + \cdots, \\ \dfrac{d\eta}{dT} = C(\theta; a, l)\xi + D(\theta; a, l)\eta + \cdots. \end{cases}$$

则特征方程

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A+D)\lambda + (AD - BC) = 0$$

要有重根，即要取实的 θ 使

$$\Delta \equiv (A+D)^2 - 4(AD-BC) \equiv (A-D)^2 + 4BC = 0.$$

将 A, B, C, D 之表达形式代入，则可得

$$\begin{aligned}\Delta \equiv & \cos^2\theta[\{(l+5)^2+24a^2\}w_3^2+\{2al-22a\}w_3z_3 \\ & +25a^2z_3^2]+\cos\theta\sin\theta[\{50al+50a\}w_3^2+\{30l^2 \\ & +100l+70+50a^2\}w_3z_3+\{30al+70a\}z_3^2] \\ & +\sin^2\theta[\{49a^2-24l^2-40l\}w_3^2 \\ & +\{-18al-2a\}w_3z_3+\{9l^2+42l+49\}z_3^2]=0.\end{aligned}$$

现在，将

$$w_3 = \frac{3a(2l+3)+(3l+5)\sqrt{3(l(l+2)-3a^2)}\,i}{[l(3l+5)^2-a^2(15l+24)]}$$

$$z_3 = \frac{3a^2-l(3l+5)-a\sqrt{3(l(l+2)-3a^2)}\,i}{[l(3l+5)^2-a^2(15l+24)]}$$

代入，则

$$\begin{aligned}& [l(3l+5)^2-a^2(15l+24)]^2\Delta \\ & \equiv \cos^2\theta[E_1+iF_1\sqrt{3(l(l+2)-3a^2)}] \\ & +\cos\theta\sin\theta[E_2+iF_2\sqrt{3(l(l+2)-3a^2)}] \\ & +\sin^2\theta[E_3+iF_3\sqrt{3(l(l+2)-3a^2)}]=0.\end{aligned}$$

这里，$E_j=E_j(a,l)$，$F_j=F_j(a,l)$ 是 a, l 的实系数多项式。

将实部与虚部分离，即有

$$E_1\cos^2\theta+E_2\cos\theta\sin\theta+E_3\sin^2\theta=0,$$

$$F_1\cos^2\theta+F_2\cos\theta\sin\theta+F_3\sin^2\theta=0.$$

这两式要有共同的 θ，则必须行列式

$$J(a,l) \equiv \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & 0 \\ 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \\ 0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0.$$

这个消去式 $J(a,l)$ 是 a, l 的实系数多项式。

我们首先验证 $J(a,l)\neq 0$。例如验证 $J(1,-10)\neq 0$. 即命 $a=1, l=-10$，则

$$w_3=\frac{51+25\sqrt{231}\,i}{6124},\quad z_3=\frac{247+\sqrt{231}\,i}{6124},$$

$$E_1=-5714000,\quad F_1=-124192,$$

$$E_2=64282000,\quad F_2=11938000,$$

$$E_3=309966952,\quad F_3=-3605496,$$

$$E_1\cos^2\theta+E_2\cos\theta\sin\theta+E_3\sin^2\theta=0$$

的两根 $\cot\theta=-3.64,\ 14.89$。(精确到小数 2 位)。然而

$$F_1\cos^2\theta+F_2\cos\theta\sin\theta+F_3\sin^2\theta=0$$

的两根 $\cot\theta=0.30,\ 95.82$。(精确到小数 2 位)。因此，这两方程没有公根。由此不存在实 θ 的向量场旋转，使 $\lambda_1=\lambda_2$。

$J(a,l)\neq 0$，因此它是代数曲线。但是由 P_3 的两孤立极限曲面形成的套环，在参数 (a,l) 的微小变动下，仍为套环，它在 (a^2,l) 参数平面上可有一个开域，因此不是代数曲线 $J(a,l)=0$ 所可以充满的，这是一个矛盾。这个矛盾否决了由 P_3 的两张孤立极限曲面形成套环的可能性。定理 2.7 证毕。

§5. 其它区的研究

从Ⅰ区过渡到Ⅱ区，这时的情形只有∞奇点由一个变为三个。这时，由 $\lambda=\lambda_2$ 的孤立极限曲面所形成的极限环有可能与无限远处的两个鞍点相遇，形成奇环。因此

$$\alpha\leqslant 1,\ \beta=0,\ N=\alpha+\beta\leqslant 1.$$

这时的控制奇点组仍为 (P_3,P_4) 为 (f,f)。

由Ⅱ区向Ⅲ区过渡，其区别为 $P_2(0,1)$ 由焦点 F 变成结点 N. 这时，绕 $P_2(0,1)$ 的极限环不再存在，即

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ N=\alpha+\beta=0.$$

这时的控制奇点组仍为 (P_3,P_4)，为 (f,f)。

注意，在上述过渡时，无切直线

$$L: 1+au+(3l+5)x=0$$

仍然保持无切性。因此，两半平面仍可各自研究。

由Ⅲ区向Ⅳ区过渡，其区别在于 P_3， P_4 由复奇点重合后变为实奇点，再分开为结点和鞍点，即

$$(f,f) \longrightarrow (\text{鞍结点}) \longrightarrow (N,S)。$$

原来由(f,f)控制的曲面过渡到由(N,S)控制。由第三篇定理2.8知道，实曲线除与S相联的一条外，均与N通过复曲面相联，由此知不产生实极限环。

下面从

$$\frac{du}{dt}=-x+lu^2+x^2, \quad \frac{dx}{dt}=u(1+(3l+5)x) \qquad (2.10)$$

出发，在 $-5/3>l>-2$ 中，奇点组为

$$C,S,N,N,S,N,S.$$

控制奇点组为(P_3,P_4)，为(N,N)。

当 $a\neq 0$，回到(2.8)，则奇点组化为

$$F^{(8)},S,N,N,S,N,S.$$

这里 P_3,P_4 仍为控制奇点，而由 $F^{(8)}$不会产生实极限环，因此，在Ⅵ区中不存在实极限环。

由Ⅵ区向Ⅶ区过渡，只是P_3与P_5重合，再分解为 P_3 及 P_5. 这时奇点由N与S重合，再分解为S与N。因此除过 $P_3(S)$的积分曲线外，其他实积分曲线仍由 P_4、P_5 的(N,N)所控制，故Ⅶ区也不出现极限环。

由Ⅶ区向Ⅴ区过渡，这时 P_2 与 P_4 重合，再分解为 P_2 与P_4，奇点由 S,N 重合，再分解为 N,S。故除过 P_4 鞍点的积分曲线外，其他实积分曲线均通过复曲面与 P_2 及 P_5 相联系，即仍与 N,N 相联系，故也不出现实极限环。

下面从

$$\frac{du}{dt}=-x+lu^2+x^2,\ \frac{dx}{dt}=u(1+(3l+5)x),\qquad(2.10)$$

$$-5/3<l<0,$$

的奇点组

$$C,S,S,S,N,N,N$$

出发，所有积分曲面过∞处三个结点之一。事实上，P_5，P_6,P_7每个点有一张特殊曲面外，其他所有的积分曲面均过这三点。

当$a\neq0$，即进入Ⅷ区，则奇点组化为

$$F^{(8)},S,S,S,N,N,N.$$

因此，P_5,P_6,P_7仍为控制奇点组，所有实积分曲线均通过复曲面与这三点相联，因此，也不出现实极限环。

由Ⅷ区向Ⅸ区过渡，即P_3与P_6重合后再分开为P_3,P_6，这时即S,N重合再分为N,S。这样除过P_6的一条积分曲线外，其他的实积分曲线均与$P_3P_5P_7$三个实结点相联系，因此，也不产生实极限环。

由

$$\frac{du}{dt}=-x+lu^2+x^2,\ \frac{dx}{dt}=u(1+(3l+5)x),\ 0<l,(2.10)$$

的奇点组C,S,n,n,N,S,N出发，P_3及P_4为控制奇点组，为n,n。

这时因，$l>0$，故

$$F_0(u,x;l)\equiv u^2-\frac{1}{2l+5}\left[x-\frac{2(l+3)}{(l+5)}\right]^2+\frac{2(l+1)(l+3)}{l(l+5)^2}=0$$

为双曲线；这个双曲线在∞处的"根"在P_5及P_7，即N,N。

$$F_1(u,x;l)\equiv1+(3l+5)x=0$$

这一直线在上述双曲线的两支之间，因为

$$F_0(u,x;l)=0\text{ 与 }F_1(u,x;l)=0$$

的交点为虚点

$$w_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{3l(l+2)}}{l(3l+5)}i, \quad z_{3,4}=-\frac{1}{3l+5}.$$

当 $a\neq0$，跨入X区，则奇点组化为

$$F^{(3)}, S, f, f, N, S, N.$$

控制奇点组为 P_3, P_4，这时为 f, f.

但是 $F_1(u,x;l)=0$ 这一直线所形成的奇环，由于 $F_0(u,x;l)=0$ 这两支双曲线的限制，不能收缩成极限环，因为，这些双曲线有"根"在 P_5 与 P_7 的 N,N 点，P_2 为 S，也排除极限环绕 P_2。故X区无极限环。

总结可得

定理 2.8 具有三阶细焦点的(E_2)的结构分为十区，按(a^2, l)图上奇点的变性线割开。

在Ⅰ区中，$\alpha=1$，$\beta=0$，$N=1$；

在Ⅱ区中，$\alpha\leqslant1$，$\beta=0$，$N\leqslant1$；

在其他区中，$\alpha=0$，$\beta=0$，$N=0$。

总之，$N\leqslant1$，且当 $N=1$ 时，$\alpha=1, \beta=0$。

§6. 通解的解析表达形式

在一个焦点或结点附近，在一百年前，已有庞加莱等人的通解表达形式

$$F_1F_2^A=\text{const},$$

A即在此奇点的示性数 $-\lambda_1/\lambda_2$。

$$\frac{dF_1}{dt}=\lambda_1F_1, \qquad \frac{dF_2}{dt}=\lambda_2F_2,$$

$F_1=0$ 及 $F_2=0$ 过此奇点。

对于高阶焦点，在其附近我们已有

$$\exp\left[\frac{-1}{k(\Phi\bar{\Phi})^k}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} d_{2k}(\Phi\bar{\Phi})^k\right)\right]=\text{const.}$$

这里

$$\frac{d\Phi}{dt}=M\Phi,\quad \frac{d\bar{\Phi}}{dt}=\bar{M}\bar{\Phi},$$

$$M=-i+\sum_{l=1}^{\infty} C_{2l}(\Phi\bar{\Phi}),$$

$$\Phi=w+iz+\sum_{N=2}^{\infty}\sum_{j+k=N} C_{jk}w^j z^k,$$

$$\bar{M}=i+\sum_{l=1}^{\infty}\bar{C}_{2l}(\Phi\bar{\Phi}),$$

$$\bar{\Phi}=w-iz+\sum_{N=2}^{\infty}\sum_{j+k=N}\bar{C}_{jk}w^j z^k.$$

现在，我们将从事全局性的研究。先由 I 区开始，这时所有的四个有限奇点都是焦点，因此每点附近均可写出下面要研究的全局的表达形式。

首先由 $a=0$ 出发，这时已有通解的表达形式为

$$F_0(w,z;l)[F_1(w,z;l)]^{-k(l)}=\text{const.}$$

或写成

$$[F_0(w,z;l)]^{-\frac{1}{k(l)}}F_1(w,z;l)=\text{const.}$$

这里记

$$F_0(w,z;l)\equiv w^2-\frac{1}{2l+5}z^2+\frac{4(l+3)}{(2l+5)(l+5)}$$

$$+\frac{2(l+3)}{l(2l+5)(l+5)}\equiv(w-h_1(z;l))(w+h_1(z;l))$$

$$\equiv\Phi_{32}(w,z;l)\Phi_{42}(w,z;l),$$

其中

$$h_1(z;l)\equiv\sqrt{\frac{1}{2l+5}z^2-\frac{4(l+3)}{(2l+5)(l+5)}-\frac{2(l+3)}{l(2l+5)(l+5)}},$$

$$\Phi_{32}(w,z;l)=w-h_1(z;l),$$
$$\Phi_{42}(w,z;l)=w+h_1(z;l),$$
$$-\frac{1}{k(l)}=-\frac{3l+5}{2l}.$$

这里记号表明，通解由三张曲面

$$F_1(w,z;l)=0,\quad \Phi_{32}(w,z;l)=0,\quad \Phi_{42}(w,z;l)=0$$

所组成．其中 $F_1=0$ 与 $\Phi_{32}=0$交于 P_3；$F_1=0$ 与 $\Phi_{42}=0$交于 P_4．为符号的统一计，也有

$$\Phi_{31}=F_1,\quad \Phi_{41}=F_1.$$

则 Φ_{31} 与 Φ_{32} 交于 P_3，Φ_{41} 与 Φ_{42} 交于 P_4．

现在通解

$$\mathscr{F}(w,z;l)=\Phi_{31}(w,z;l)\Phi_{41}(w,z;l)[F_1(w,z;l)]^{-k(l)}=\text{const}$$

之任何函数

$$G(\mathscr{F}(w,z;l))=\text{const}$$

也是通解．为了表示出 P_1 及 P_2 的奇点性质，可将通解写成三个表示的乘积，即

$$G(\mathscr{F}(w,z;l)=\left[\exp\left\{\frac{-1/3}{[\mathscr{F}(w,z;l)-\mathscr{F}(0,0;l)]^3}\right\}\right]^{\nu_1}\times[\mathscr{F}(w,z;l)-\mathscr{F}(0,1;l)]^{\nu_2}[\mathscr{F}(w,z;l)]=\text{const}.$$

第一个因子表示经过 P_1 点的性质，第二个因子表示经过 P_2 的性质，第三个因子即经过 P_3 与 P_4 的性质．

这个表示中出现了七张特殊的曲面．

$\mathscr{F}(w,z;l)-\mathscr{F}(0,0;l)=0$，即

$$F_0(w,z;l)[F_1(w,z;l)]^{-k(l)}-F_0(0,0;l)[F_1(0,0;l)]^{-k(l)}=0.$$

即 $F_0(w,z;l)-F_0(0,0;l)[F_1(0,0;l)]^{-k(l)}[F_1(w,z;l)]^{k(l)}=0$

或 $$w^2-\frac{1}{2l+5}z^2+\frac{4(l+3)}{(2l+5)(l+5)}z+\frac{2(l+3)}{l(2l+5)(l+5)}$$

$$-\frac{2(l+3)}{l(2l+5)(l+5)}[1+(3l+5)z]^{k(l)}=0.$$

故可分解为

$$(w+h_2(z))(w-h_2(z))=0$$

两个因子，亦即得到两张特殊曲面过 P_1 点。

同理

$$F_0(w,z;l)[F_1(w,z;l)]^{-k(l)}-F_0(0,1;l)$$
$$[F_1(0,1;l)]^{-k(l)}=0$$

也可分解为两个因子，亦即得到两张特殊曲面过 P_2 点。

至于第三个因子，则表示过 P_3 及 P_4 的特殊曲面，过每点有两张，但有一张是两点共同的，因此只有三张曲面。

因此，总共七张曲面，其中只有一张是实系数的，即 $F_1(w,z;l)=1+(3l+5)z=0$，其他六张均是复系数的，但成为三组，每组两张，其系数互为共轭。

下面将 $a\neq0$，仍在 I 区中，则四个奇点

$$C, C, n, n$$

变为

$$F^{(3)}, F, f, f.$$

这时三个因子分别变化，第一个因子化为

$$\left(\frac{\Phi_{11}}{\Phi_{12}}\right)^{i\gamma}\exp\left[\frac{-1}{3(\Phi_{11}\Phi_{12})^3}[1+\sum_{n=1}^{\infty}d_{2n}(\Phi_{11}\Phi_{12}]\right],$$

第二因子化为

$$\Phi_{21}^{\lambda_{21}}\Phi_{22}^{\lambda_{22}},$$

第三个因子化为

$$F_1\Phi_{32}^{\Lambda_3}\Phi_{42}^{\Lambda_4}.$$

这里 $\Phi_{11}=0$ 与 $\Phi_{12}=0$ 为过P_1 的孤立极限曲面，系数共轭。$\Phi_{21}=0$ 及 $\Phi_{22}=0$ 为过 P_2 的孤立极限曲面，λ_{21} 及 λ_{22} 为 P_2 的两特征根，Λ_3 及 Λ_4 为 P_3 及 P_4 点的示性数。

注意到 $F_1=0$ 是绕 P_2 的极限环，因此，也有 $F_1=\Phi_{32}\Phi_{42}\delta_1^2$ 的表达式，结论是

定理 2.10 对于 I 区中的(E_2)系统，其通解可以写成

$$\left[\left(\frac{\Phi_{11}}{\Phi_{12}}\right)^{iV}\exp\left\{-\frac{1}{3(\Phi_{11}\Phi_{12})^3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}d_{2n}(\Phi_{11}\Phi_{12})^n\right)\right\}\right]^{\nu_1}$$

$$\times\left[\Phi_{21}^{\lambda_{21}}\Phi_{22}^{\lambda_{22}}\right]^{\nu_2}\times\left[F_1\Phi_{32}^{A_3}\Phi_{42}^{A_4}\right]=\text{const.}$$

这里的函数的变量为(w,z)，参量为(l,a)。

注意，当 const $=0$，∞时，三因子脱开，第一因子得到 $\Phi_{11}=0$，$\Phi_{12}=0$ 两张孤立极限曲面。第二因子得到 $\Phi_{21}=0$，$\Phi_{22}=0$ 两张孤立极限曲面。第三因子得到 $F_1=0$，$\Phi_{32}=0$，$\Phi_{42}=0$ 三张孤立极限曲面。

现在，从 I 区到其他区的扩展，可以发生的变化是，由 I 区到 II 区，$F_1=0$ 可能与∞处的鞍点相联，破坏了实极限环。但是

$$F_1=F_1(w,z;l,a)$$

这一因子仍存在。

由 II 区向 III 区过渡，则 λ_{21} 与 λ_{22} 由复共轭变成实根，即 P_2 由 F 变成 N。

由 III 区向 IV 区过渡，则 A_3 与 A_4 由复数变成实数，并出现一负一正，即 P_3 与 P_4 由 f,f 变成 N,S。

由 IV 区向 V 区过渡，即 A_3 变正，故 P_3 由 N 变 S .注意 P_3，P_4 仍过 $F_1=0$。

由 IV 区向 VI 区过渡，即 λ_{21} 与 A_4 变号，使 P_2，P_4 由 N,S 变 S,N。

由 V 区向 VII 区过渡，即 λ_{22} 变号，使 P_2 由 N 变 S。

由 VII 区向 VIII 区过渡，即 A_4 变号，使 P_4 由 N 变 S。

由 VIII 区向 IX 区过渡，即 A_3 变号，使 P_3 由 S 变 N。

由 IX 区向 X 区过渡，即 A_3 与 A_4 由实变复。

总之，这一表达形式，对于Ⅰ区到Ⅹ区均适用，但方次 λ_{21}，λ_{22}，Λ_3，Λ_4 在变化。

注意，当 $V_7=0$ 时，$\lambda_{21}=\lambda_{22}$ 为实数，Λ_3 与 Λ_4 也为实数，即 $P_1P_2P_3P_4$ 化为 C,C,n,n。

第三章　二次系统的一般情形

§1.　二次系统的极限环数不超过四个

定理 3.1　实系数二次系统

$$\frac{du}{dt}=U_2(u,x),\quad \frac{dx}{dt}=X_2(u,x) \qquad (E_2)$$

的极限环数不超过四个，用记号有

$$N(2)\leqslant 4.$$

证明　用反证法。设有某一特殊系数的 (E_2) 具有五个或五个以上的极限环，我们将导出矛盾．

由于二次系统最多有两串极限环，一般有极限环数

$$N=\alpha+\beta.$$

现已设 $N\geqslant 5$，则 α 及 β 中必至少有一个具有 3 个或 3 个以上的极限环．将这一串极限环的中心的焦点作为原点，另一串环的中心的焦点放在 x 轴上，则这个特殊的(E_2)可以写成下面的典型形式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-x+\lambda u+lu^2+(5a+\varepsilon)ux+nx^2, \\ \dfrac{dx}{dt}=u\left(1+au+\left(3l+5n+\dfrac{\delta(l+n)+\varepsilon}{a}\right)x\right). \end{cases} \qquad (3.1)$$

这里含有六个任意参数 l，a，n，δ，ε，λ．奇点 $P_1(0,0)$周围至

少有三个极限环，奇点 $P_2\left(0, \frac{1}{n}\right)$周围有其他的极限环．如果只有一串极限环，则 P_2 可取其他任何奇点代之；如果没有其他奇点，则取 $n=0$。注意到 $n=0$ 是 $n\neq0$ 的极限情形，因此可以先研究一般的 $n\neq0$ 的情形，再取极限。当然也可对 $n=0$ 的情形直接验证，情况更简单．我们现在研究 $n\neq0$ 的一般情形，则可将 n 化为 1，即有下列形式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-x+\lambda u+lu^2+(5a+\varepsilon)ux+x^2, \\ \dfrac{dx}{dt}=u\left(1+au+\left(3l+5+\dfrac{\delta(l+1)+\varepsilon}{a}\right)x\right). \end{cases} \tag{3.2}$$

这样取定的优点在于，当 $\lambda=\varepsilon=\delta=0$ 时系统化为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-x+lu^2+5aux+x^2, \\ \dfrac{dx}{dt}=u(1+au+(3l+5)x). \end{cases} \tag{3.3}$$

这便是前一章具有三阶细焦点的(E_2)的一般形式。

现在设我们已经有一个系统(3.2)在原点 $P_1(0, 0)$之周围至少有三个极限环，则我们用 $\lambda=\delta=\varepsilon=0$ 的系数变动，将系统中的三个极限环收入原点 $P_1(0, 0)$，则根据前章已经证明的结论，即(3.3)最多有一个极限环，并且只能出现在 $P_2(0, 1)$的周围，这个极限环还在有限复焦点处有“根”．系统(3.3)的一般解析表达式，已知为七张特殊曲面所构成，有如下形式：

$$\left[\left(\frac{\Phi_{11}}{\Phi_{12}}\right)^{iV_7}\exp\left\{-\frac{1}{3(\Phi_{11}\Phi_{12})^3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}d_{2n}(\Phi_{11}\Phi_{12})^n\right)\right\}\right]^{\nu_1}$$

$$\times\left[\Phi_{21}^{\lambda_{21}}\Phi_{22}^{\lambda_{22}}\right]^{\nu_2}\times\left[F_1\Phi_{32}^{\Delta_3}\Phi_{42}^{\Delta_4}\right]=\text{const}.$$

当我们将 δ，ε，λ 相继由零变为小数时，可以相继跳出三个极限环，由此一般解析表达式化为

$$\left[\left(\Phi_{11}^{\lambda_{11}}\Phi_{12}^{\lambda_{12}}\right)F_2^{\lambda_2}F_3^{\lambda_3}F_4^{\lambda_4}\exp\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}d_{2n}\left(\Phi_{11}\Phi_{12}\right)^n\right\}\right]^{\nu_1}$$

$$\times\left[\Phi_{21}^{\lambda_{21}}\Phi_{22}^{\lambda_{22}}\right]^{\nu_2}\times\left[F_1\Phi_{32}^{\Delta_3}\Phi_{42}^{\Delta_4}\right]=\text{const.} \tag{3.4}$$

这里有 10 张特殊曲面，即四个实极限环所产生的四张实系数曲面 $F_j=0$，$(j=1,2,3,4)$，和六张复系数曲面 Φ_{11}，Φ_{12}，Φ_{21}，Φ_{22}，Φ_{32}，Φ_{42}，它们分为三组，每组系数是共轭的。已知过实焦点的弧立极限曲面不产生实极限环，P_3 及 P_4 为复奇点时，$F_1=0$ 可能产生极限环，$\Phi_{32}=0$ 及 $\Phi_{42}=0$ 也已证不产生实极限环．当 P_3 及 P_4 变为实奇点时，$F_1=0$，$\Phi_{32}=0$，$\Phi_{42}=0$ 通过实奇点，而实极限环上不应有实奇点，由此也不产生实极限环．由此可知最多可能由 $F_j=0$ $(j=1,2,3,4)$ 产生四个极限环．在参数变动时，$F_2=0$，$F_3=0$，$F_4=0$ 可能通过重合而变成复系数的曲面，并且不产生实的极限环。但它们的因子在表达式中仍然存在．

上面的讨论，对于小参数 λ，δ，ε 是成立的．但是表达形式的解析性质在参数空间中的一个开区域成立，则根据解对于参数的解析依赖关系，解的一般形式也可以解析拓展到其他的参数域．由此即知这个表达式最多产生四个实的极限环。定理 3.1 证毕。

由此可见，假设有五个极限环，仍然要导出不超过四个极限环。

§2. 有四个极限环的二次系统必为(1.3)结构

定理 3.2 具有四个极限环的实系数二次系统的极限环必然是三个成串及一个单独的结构，简称(1, 3)结构．用记号可写成

$$(1)+(1\supset 1\supset 1).$$

证明 设某一实系数的二次系统有四个极限环，即

$$4=N=\alpha+\beta,\qquad \alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0.$$

这里从逻辑上有三种可能的组合，即

$$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (0,\ 4).$$

现在必须排除后面两种的存在性，证明是用反证法.

首先排除(0，4)的可能性.

设某个二次系统具有四个极限环 $F_j=0$ $(j=1,2,3,4)$成为一串，则将其中三个收缩到焦点，得到三阶细焦点，这时知另一个 $F_1=0$ 必通过复焦点 P_3 与 P_4. 将系统的参数还原到原状，这时 $F_1=0$ 仍然有根在 P_3 与 P_4. 这样，在 $F_1=0$ 内的第一个环设为 $F_2=0$，在 $F_1=0$ 及 $F_2=0$ 之间，在实平面有积分曲线以两个为极限，这些积分曲线所拓展的积分曲面也都与 P_3，P_4 相联，因为 $F_1=0$ 与 P_3 及 P_4 通过积分曲面相联. 这样，作为极限 $F_2=0$ 也应当与 P_3 及 P_4 相联，于是，$F_2=0$ 也应为过 P_3 及 P_4 的一张孤立极限积分曲面. 但是，我们已知过 P_3 的两张孤立极限积分曲面不能形成套环，由此可知二次系统不存在(0，4)结构.

下面还需要排除(2，2)结构.

用反证法. 设某个二次系统的极限环具有(2，2)结构，则可将这两个焦点放在(0，0)及(0，1)位置. 系统可化为

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-x+\lambda u+lu^2+mux+x^2, \\ \dfrac{dx}{dt}=u+au^2+bux. \end{cases} \tag{3.5}$$

我们将每串极限环内部的一个极限环收缩到焦点，形成两个一阶细焦点，即

$$V_1(P_1)=\lambda=0,$$
$$V_1(P_2)=m=0.$$

这样得到系统

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-x+lu^2+x^2, \\ \dfrac{dx}{dt}=u+au^2+bux. \end{cases} \tag{3.6}$$

用附录三中的一般公式，可以算出

$$V_3(P_1)=-a(b+2l)\neq 0,$$

$$V_3(P_2)=\frac{a(b+2l)}{(1+b)}\neq 0.$$

注意到在 P_2 处的雅可比

$$\left|\begin{matrix} 2lu & -1+2x \\ 1+2a+bx & bu \end{matrix}\right|_{(0,1)}=\left|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1+b & 0 \end{matrix}\right|,$$

行列式值为 $-(1+b)$。P_2 为焦点的条件应为

$$-(1+b)>0. \tag{3.7}$$

由此可见

$$V_3(P_1)V_3(P_2)=\frac{a^2(b+2l)^2}{-(1+b)}>0. \tag{3.8}$$

亦即 P_1 与 P_2 的稳定性是同号的。

我们现在的方法类似于研究三阶细焦点的情形，即先找可以完全积分的中心类型，然后再回到有两个一阶细焦点的情形。

方法仍然是命 $a=0$，这时系统(3.6)化为

$$\frac{du}{dt}=-x+lu^2+x^2, \quad \frac{dx}{dt}=u(1+bx). \tag{3.9}$$

这里含有两个参数 $(b,\ l)$。

系统(3.9)可以有完全的显式积分

$$F_0(u,\ x)=C[F_1(u,\ x)]^k, \tag{3.10}$$

$$F_0(u,\ x)=u^2+\frac{1}{b^2(l-b)}(1+bx)^2$$

$$+\frac{2(2+b)}{b^2(b-2l)}(1+bx)+\frac{(1+b)}{b^2 l},$$

$$F_1(u,\ x)=1+bx, \tag{3.11}$$

$$k=\frac{2l}{b},$$

上式对于$\frac{2l}{b}\neq 0,1,2$ 成立；当$\frac{2l}{b}=0,1,2$ 时还有对数或指数项。由条件(3.7)知 $b<-1$.

P_1 及 P_2 是实中心。

P_3 及 P_4 的坐标为

$$w_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{(1+b)}{b^2 l}},\quad z_{3,4}=-\frac{1}{b}.$$

当 $l>0$，P_3 及 P_4 为实奇点，$\Lambda=-\frac{2l}{b}>0$，故为实鞍点.

当 $l<0$，P_3 及 P_4 为复奇点，$\Lambda=-\frac{2l}{b}<0$，故为复结点.

P_5 相当于 $1+bx=0$ 上的∞点。

命 $u=\frac{1}{\xi}$，$x=\frac{\eta}{\xi}$，有

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{b^2(l-b)}(\xi+b\eta)^2+\frac{2(2+b)}{b^2(b-2l)}\xi(\xi+b\eta)\\+\frac{(1+b)}{b^2 l}\xi^2=C[\xi+b\eta]^{\frac{2l}{b}}\xi^{\left(2-\frac{2l}{b}\right)}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

要研究P_5的性质，则可由$\frac{2l}{b}\left(2-\frac{2l}{b}\right)$之符号而定，变号线在 $l=0$ 及$l=b$。

由于 $b<-1<0$，故

当 $l>0$，则 $\frac{2l}{b}\left(2-\frac{2l}{b}\right)=4\left(\frac{l}{b}-\left(\frac{l}{b}\right)^2\right)<0$，故 P_5 为实结点.

当 $0>l>b$ 时，$\frac{2l}{b}\left(2-\frac{2l}{b}\right)>0$，故 P_5 为实鞍点。

当 $b>l$，则因 $0>b>l$，有$\frac{2l}{b}\left(2-\frac{2l}{b}\right)<0$， 故$P_5$为实结点。

P_6及P_7，当$\xi=0$，由方程左方为零，有

$$1+\frac{1}{l-b}\eta^2=0,$$

$$\eta=\pm\sqrt{b-l}.$$

故当 $b>l$,P_6 及 P_7 为实奇点,并且 $0>b>l$,有 $2-\frac{2l}{b}<0$,故为实鞍点。

而当 $b<l$，P_6 及P_7 为复奇点，$2-\frac{2l}{b}>0$， 故 P_6 及 P_7 为复结点。

由此可见，在 $b<-1$ 区中，由 $l=0$ 及 $l=b$ 将区域分为三区，按 l 由大到小的次序分别用Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ记它们，则可有下面的表：

区域号	判　据	奇点组	控制组
Ⅰ	$b<-1,\ l>0$	$C\,C\,S\,S\,N\,n\,n$	$(P_5P_6P_7)=(Nnn)$
Ⅱ	$b<-1,0>l>b$	$C\,C\,n\,n\,S\,n\,n$	$(P_3P_4)=(nn)$
Ⅲ	$b<-1,\ b>l$	$C\,C\,n\,n\,N\,S\,S$	$(P_3P_4)=(nn)$

所有控制组都由结点组成，所有曲面均过它们之一。因此这个系统(3.9)也是具有强有根性的系统。

$d=m=a=0.(l,b)$参数分区图

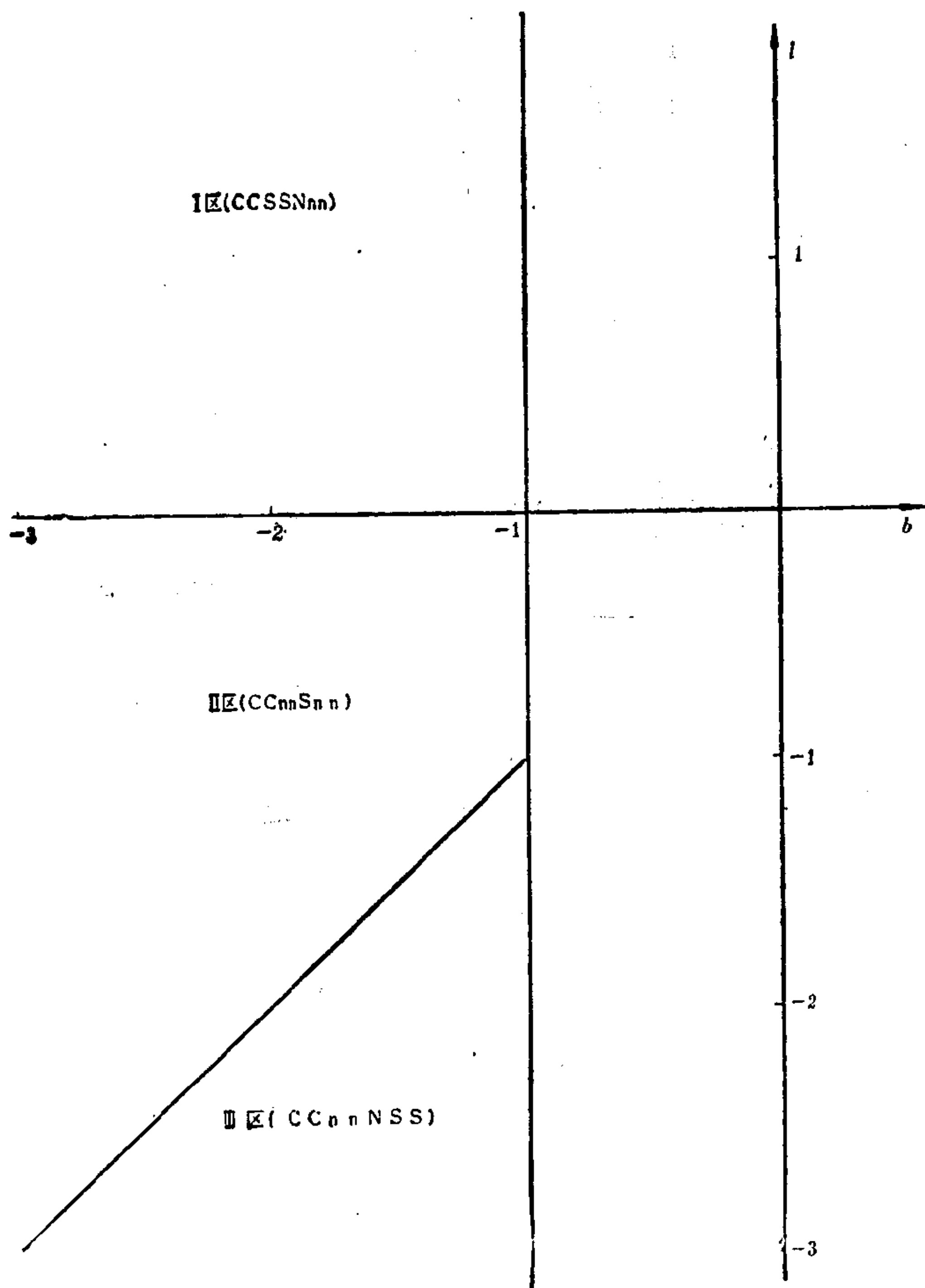


图 6

下面让 a 由 0 变为非零，则在微扰下，系统化为下面的奇点组

来自区号	奇　点　组	控　制　组
I	$F^{(1)}F^{(1)}SSNff$	$(P_5P_6P_7)=(Nff)$
II	$F^{(1)}F^{(1)}ffSff$	$(P_3P_4)=(ff)$
III	$F^{(1)}F^{(1)}ffNSS$	$(P_3P_4)=(ff)$

在来自 I 区的系统，所有积分曲面均过奇点 (Nff) 组，这时 P_6 及 P_7 各有一张孤立极限积分曲面（注意∞处有一根是 $\xi=0$）。因此，最多可能产生一个实极限环。事实上，也确有实例，例如系统

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dT}=-z+2w^2+z^2, \\ \dfrac{dz}{dT}=w(1+w-2z). \end{cases}$$

这相当于 $d=m=0$，$a=n=1$，$l=2$，$b=-2$。这时存在唯一的极限环绕 $P_1(0,0)$ 点.

总之，由 I 区出发的系统，只要奇点组的性质保持，则

$$N\leqslant 1.$$

由 II 区出发的系统，由于 P_3，P_4 为复奇点，亦即直线

$$1+au+bx=0$$

仍为无切线。这样完全可以利用奇点的稳定与不稳定性，如同具有三阶细焦点的区域 I 中的证法，可以证明一定有一个，并且只有一个极限环. 例如系统

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dT}=-z-w^2+z^2, \\ \dfrac{dz}{dT}=w(1+w-3z). \end{cases}$$

CCSSNnn Ⅰ区

$d=m=0$,

$a=0$, $n=1$,

$b=-2, l=2$.

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt}=-x+2u^2+x^2, \\ \dfrac{dx}{dt}=u(1-2x). \end{cases}$$

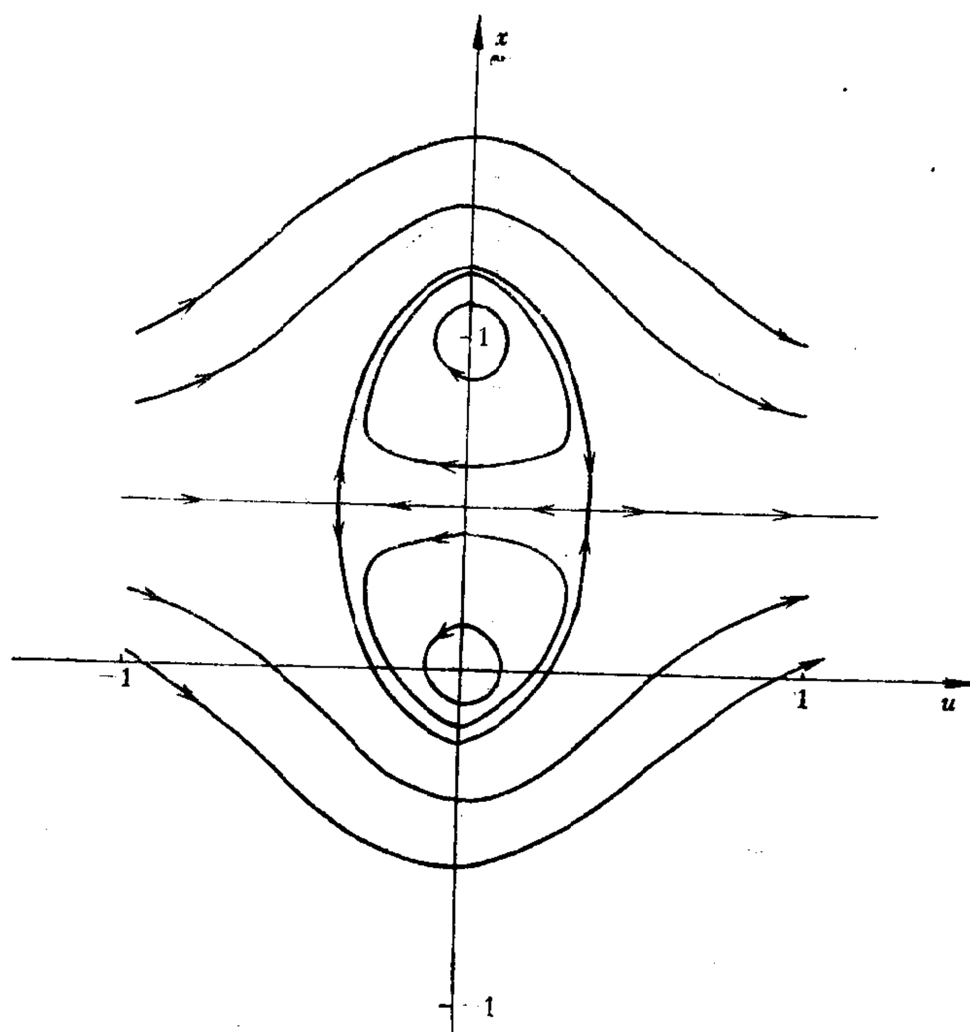


图 7

$F(1)F(1)SSNff$

$d=m=0$, $n=1$
$l=2$, $b=-2$, $a=1$ }由Ⅰ区出发之例，

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dT}=-z+2w^2+z^2, \\ \dfrac{dz}{dT}=w(1+w-2z). \end{cases}$$

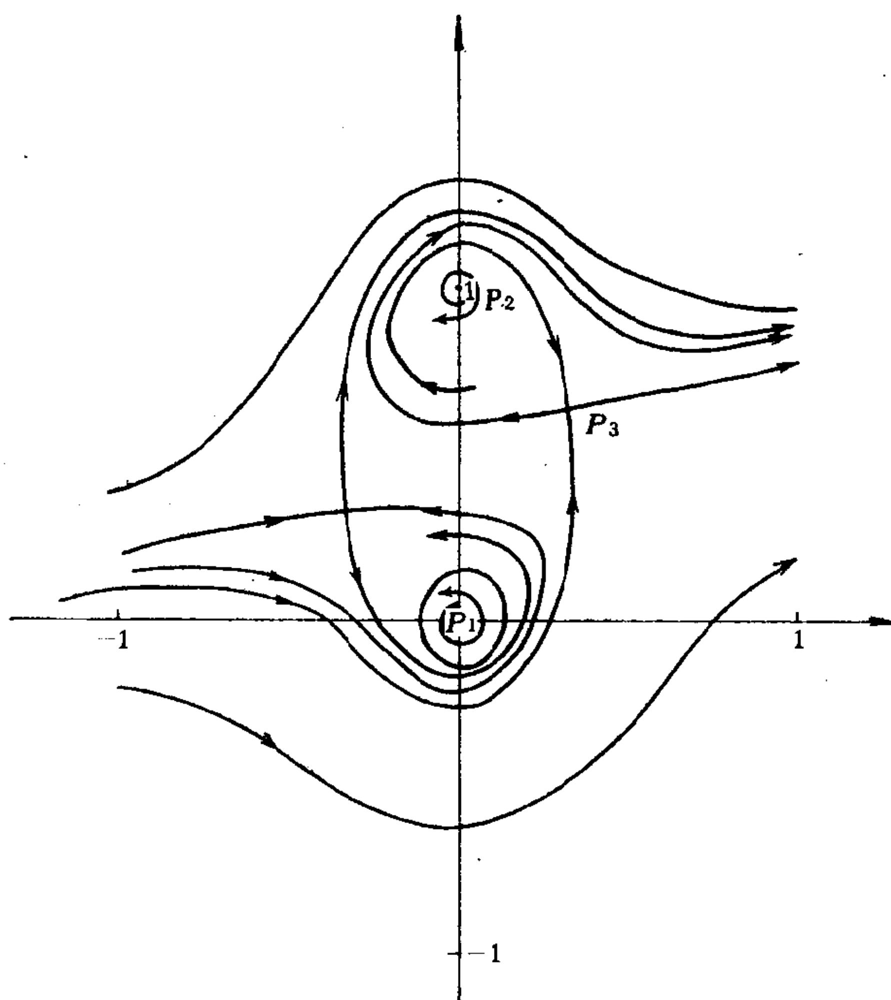
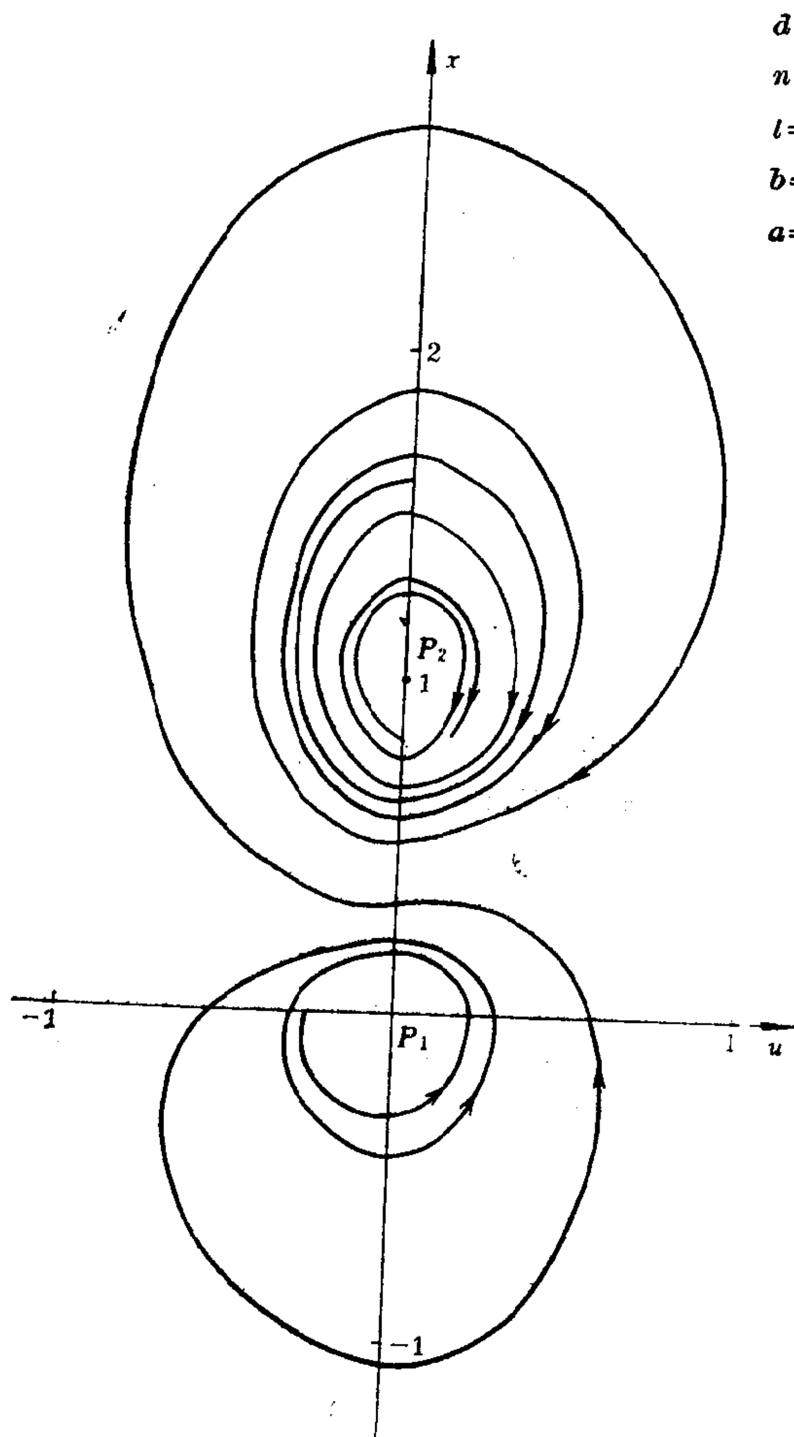


图 8



$d=m=0$
$n=1$
$l=-1$
$b=-3$
$a=1$

} 由 Ⅱ 出发之例

$F^{(1)}F^{(1)}ffSff$

$(1)+(0)$

$\Downarrow$

$(2)+(1)$

图 9

(E_2)的(1,3)结构全局示意图

(由Ⅰ区变出)

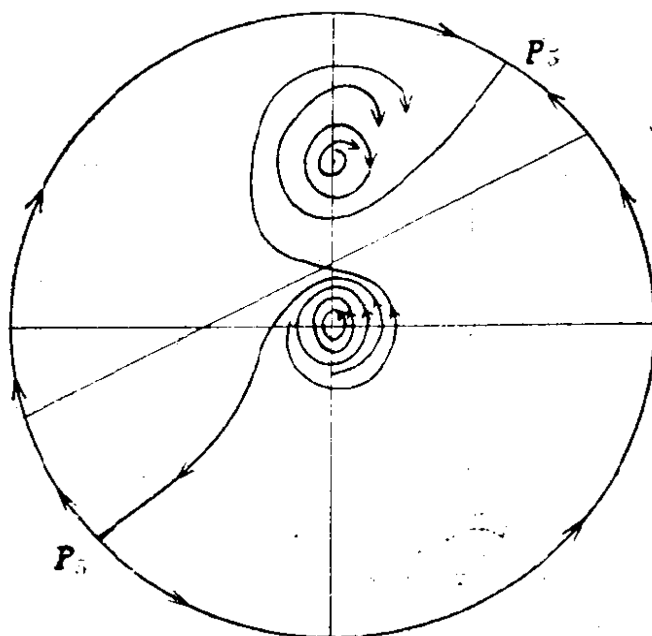


图 10

(由Ⅱ区变出)

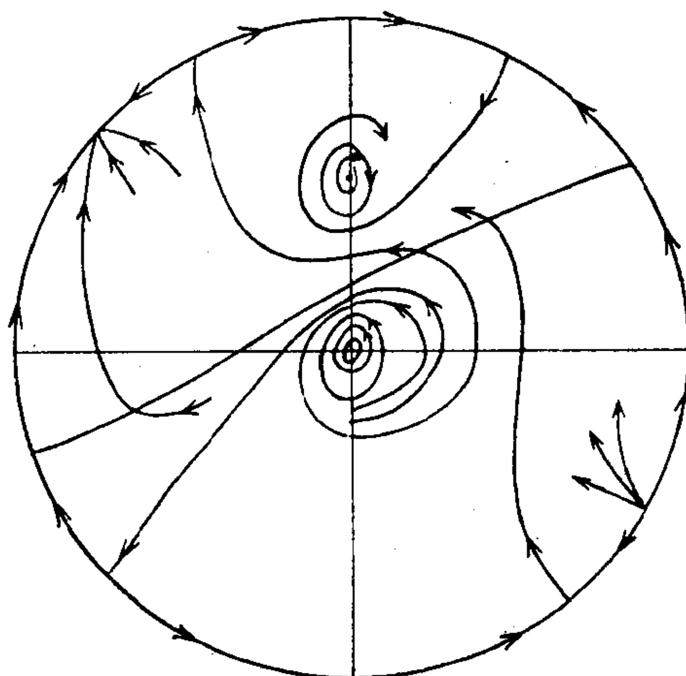


图 11

这相当于 $d=m=0$，$a=n=1$，$l=-1$，$n=-3$，则有且只有一个极限环，它绕 P_2。

由Ⅲ区出发的系统，由于∞处有三个奇点，因此实极限环可能遇到∞处的两个鞍点，变成奇环，正如具有三阶细焦点的二次系统在Ⅱ区中的情形，由此即知 $N\leqslant 1$.

总之，系统(3.6)最多只能有一个极限环．这样一来，再让两个一阶细焦点各放出一个极限环时，总共只能有三个极限环，并且是(2，1)结构．

这样，从(2，2)结构的假设出发，经过论证，我们只能得到(2，1)的可能性；由此，即排除了(2，2)结构的可能性．

结论是，当二次系统具有四个极限环时，必为(1，3)结构．定理3.2证毕．

注意(1，3)结构还有两种，即∞奇点为一实及三实两类．

§3. 可能性的实现

上面证明二次系统最多只能有四个极限环，并且排除了(0，4)和(2，2)的可能性．至于其它各种可能性，则均可用具体的数值实例加以实现．下面是具体实例的表：

对于二次系统

$$\frac{du}{dt}=-x+\lambda u+lu^2+a(5+\varepsilon)ux+nx^2,$$

$$\frac{dx}{dt}=u+\lambda x+au^2+(3l+5n+\varepsilon(l+n)+\delta)ux,$$

则极限环总数 N 和分别的 α 及 β 可经过六个参数 l，a，n，λ，ε，δ 的适当选取来加以实现，具体有

N	α	β	l	a	n	δ	ε	λ
0	0	0	-3	1	1	0	0	0
1	0	1	-3	1	1	10^{-118}	0	0
2	0	2	-3	1	1	10^{-118}	10^{-508}	0
3	0	3	-3	1	1	10^{-118}	10^{-508}	10^{-1556}
1	1	0	-6	1	1	0	0	0
2	1	1	-6	1	1	-10^{-108}	0	0
3	1	2	-6	1	1	-10^{-108}	-10^{-487}	0
4	1	3	-6	1	1	-10^{-108}	-10^{-487}	-10^{-1486}

由此得到

定理 3.3 所有 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，$0\leqslant\beta\leqslant3$ 的组合 8 种均可以具体实现。

上表是秦进水设计程序并进行计算的。

附录一　(E 2)全参数的焦点量公式 DEPS计算结果

秦元勋　刘尊全　秦朝斌

对于(E_n)的焦点量公式的推导，刘尊全、秦朝斌设计了一套程序DEPS (Differential Equation Program System)，以便计算. 计算过程如下：设有

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+\lambda x+\sum\limits_{n=2}^{N}\sum\limits_{j+k=n}a_{jk}x^jy^k, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\lambda y+\sum\limits_{n=2}^{N}\sum\limits_{j+k=n}b_{jk}x^jy^k. \end{cases} \qquad (E_N)$$

要求函数

$$F(x,\ y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\sum_{n=2}^{M}F_n(x,\ y),$$

$$F_n(x,\ y)=\sum_{j+k=n}f_{jk}x^jy^k,$$

使得

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$=\lambda(x^2+y^2)+G_3(x,\ y)+G_4(x,y)+\cdots$$

之低次项尽可能变零，求λ，a_{jk}，b_{jk}满足的条件。

显然，要二次项为零，必须$\lambda=0$. 在此条件下，一定有F_3使G_3为零，以及F_4使

$$G_4 = V_3 y^4.$$

其中 V_3 是 a_{jk} 及 b_{jk} 之函数.

当 $\lambda = V_3 = 0$，则一定可以求出 F_5 及 F_6 使 $G_5 = 0$，及 $G_6 = V_5 y^6$.

依次求出这些 $V_1 = \lambda, V_3, V_5, \cdots, V_{2k+1}$，使当它们为零时，其后之 V_j 均恒等于零，这便是所要求的焦点量公式，以及焦点最高阶数 k.

用此程序，秦元勋、刘尊全得到具有七个参量的 (E_2) 的焦点量的公式（除一个正常数的因子）如下：

方程具体写成：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + L_1 x + (L_7 - L_6)x^2 + 2(-L_2 + L_4 + L_6)xy + L_5 y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + L_1 y + L_4 x^2 + 2(L_3 + L_5 - L_7)xy + (-L_4 + L_2)y^2. \end{cases}$$

具有 L_1——L_7 七个独立参数；则除一个正常数因子外，有

$$V_1 = L_1$$

$$V_3\Big|_{V_1=0} = L_2 L_3 - L_6 L_7,$$

$$V_5\Big|_{V_1=V_3=0} = (14\text{ 项}) = (\text{如表所示})$$

项数	系　数	方		次				
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
1	5		2			1	1	
2	−15		2				1	1
3	15		1		1		1	1
4	−2		1			1	2	

项数	系　数	方			次			
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
5	16		1				2	1
6	2			2	1			1
7	6			1		1	1	1
8	−16			1			1	2
9	−5			1	1			2
10	4			2			1	1
11	−6				1		2	1
12	−15					1	1	2
13	−4						3	1
14	15						1	3

$$V_7\Big|_{V_{[illegible]}=V_{[illegible]}=V_{[illegible]}=0}=(43\text{ 项})=(\text{如下表所示})$$

项数	系　数	方			次			
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
1	30		1		2	1	2	
2	−90		1		2		2	1
3	12		1		1	1	3	
4	−36		1		1		3	1
5	190		1			2	2	1
6	30		1			3	2	
7	−725		1			1	2	2
8	−345		1				2	3

续表

项数	系　数	方			次			
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
9	−30			2	3			1
10	−90			1	2	1	1	1
11	90			1	2		1	2
12	−336			1	1	1	2	1
13	−72			2	2		1	1
14	48			1	1		2	2
15	−115			2	1			3
16	−30			2	1	2		1
17	100			3	1	1		1
18	−4			3	1			2
19	−84			2	1		2	1
20	20			4	1			1
21	−90			1		3	1	1
22	−750			1		2	1	2
23	240			2		2	1	1
24	495			1		1	1	3
25	−872			2		1	1	2
26	260			3		1	1	1
27	−220			1		1	3	1
28	68			1			3	2
29	345			1			1	4
30	−218			2			1	3
31	−68			3			1	2

续表

项数	系　数	方		次				
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
32	−40			2			3	1
33	−280			2	1	1		2
34	40			4			1	1
35	90				3		2	1
36	96				2		3	1
37	90				1	2	2	1
38	24				1		4	1
39	345				1		2	3
40	840				1	1	2	2
41	−40					2	3	1
42	864					1	3	2
43	218						3	3

$$V_j\Big|_{V_4=V_5=V_6=V_7=0}=0,\quad 当\ j>7.$$

附录二　　DELCPS 计算结果

秦 进 水

由高阶焦点跳出一族相套的极限环的方法已由秦元勋、蒲富全所提出.

方法实质以下方程为例. 给定方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y-2xy+y^2, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-(1+\varepsilon)x^2-2xy+y^2. \end{cases}$$

由附录一之公式可以算出（除一正常数因子外）

$$V_1=0, \quad V_3=\varepsilon, \quad V_5=-7(1+\varepsilon).$$

当 $\varepsilon=0$，则 $V_1=V_3=0$，$V_5=-7<0$;

当 $0<\varepsilon\ll1$，则 $V_1=0$，$V_3>0$.

由此，当 ε 由 0 变为小正数，则焦点附近可跳出一个极限环.

具体可对 $\varepsilon=0$ 作出

$$\begin{aligned} F_1(x, y)=&(x^2+y^2) \\ &+\left(\frac{2}{3}x^3-2xy^2-\frac{2}{3}y^2\right)+(y^4+4xy^3) \\ &+\left(-\frac{8}{15}x^5-\frac{4}{3}x^3y^2-4x^2y^3-8xy^4-\frac{12}{5}y^5\right) \\ &+\left(-\frac{116}{18}x^6+\frac{14}{15}x^5y-\frac{184}{12}x^4y^2+\frac{58}{9}x^3y^3+\frac{286}{15}xy^5\right), \end{aligned}$$

使

$$\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{\varepsilon=0}=-\frac{14}{15}(x^6+y^6)+(x,\ y)_7$$

$(x,\ y)_n$ 表示最少 n 次幂.

当 $\varepsilon\neq 0$ 时，有

$$\frac{dF_1}{dt}=-\frac{14}{15}(x^6+y^6)+\varepsilon\left[-x^2\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]+(x,\ y)_7.$$

其次对 $\varepsilon\neq 0$ 作出

$$\begin{aligned}F_2(x,\ y)=&(x^2+y^2)\\&+\left(\frac{2+2\varepsilon}{3}x^3-2xy^2-\frac{2}{3}y^3\right)\\&+\left(y^4+\frac{12+2\varepsilon}{3}xy^3-\frac{2}{3}\varepsilon x^3y\right),\end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}\frac{dF_2}{dt}=&\frac{2}{3}\varepsilon(x^4+y^4)\\&+\left(\frac{2}{3}\varepsilon(1+\varepsilon)x^5+\frac{4}{3}\varepsilon x^4y-\left(12+\frac{32}{3}\varepsilon+2\varepsilon^2\right)x^3y^2\right.\\&\left.-(28+10\varepsilon)x^2y^3-\left(4-\frac{2}{3}\varepsilon\right)xy^4+\left(8+\frac{2}{3}\varepsilon\right)y^5\right).\end{aligned}$$

先确定 $F_1=c_1$，使 $\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{\substack{\varepsilon=0\\F_1=c}}<0$,

次确定 $0<\varepsilon\ll 1$，使 $\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{F_1=c}<0$,

次确定 $F_2=c_2$，使 $\left.\frac{dF_2}{dt}\right|_{F_2=c_2}>0$.

具体有 $\varepsilon=10^{-49}$,

$$\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{F_1=10^{-25}}<0,\qquad \left.\frac{dF_2}{dt}\right|_{F_2=10^{-115}}>0,$$

从而保证$F_1=10^{-25}$与$F_2=10^{-115}$之间存在极限环.

现对于一般系统

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-x+\lambda u+lu^2+a(5+\varepsilon)ux+nx^2, \\ \dfrac{dx}{dt}=u+\lambda x+au^2+(3l+5n+(l+n)\varepsilon+\delta)xu. \end{cases}$$

由附录一的公式可有(除一正常因子外)

$$V_1=\lambda,$$

$$V_3\Big|_{\lambda=0}=-a\delta,$$

$$V_5\Big|_{\lambda=\delta=0}=a\varepsilon(5+\varepsilon)(5a^2(5l+6n+l\varepsilon+n\varepsilon)-(l+n)^2\cdot$$
$$\cdot(3l+6n+l\varepsilon+n\varepsilon)),$$

$$V_7\Big|_{\lambda=\delta=\varepsilon=0}=-a(2a^2+2n^2+ln)(5a^2(5l+6n)$$
$$-(l+n)^2(3l+6n)).$$

故可依次使ε，δ，λ不为零，使$V_7V_5<0$，$V_5V_3<0$，$V_3V_1<0$. 从而保证跳出三个极限环.

具体有下面两例:

例 1 $a=1$，$l=-3$，$n=1$. 则可取

$$\varepsilon=10^{-113},\ \delta=10^{-508},\ \lambda=10^{-1556},$$

使得四个圆半径依次为

$$R_1=10^{-19},\ R_2=10^{-127},\ R_3=10^{-519},\ R_4=10^{-1562}$$

之间出现三个极限环.

具体作法有

$$F_1=(x^2+y^2)+(4x^3+6x^2y+6y^3)+(30x^3y+15y^4)$$
$$+(-58x^5-30x^4y+50x^3y^2-190x^2y^3-28y^5)$$
$$+(-840x^5y+435x^4y^2-636x^3y^3$$

$$-\frac{1155}{2}x^2y^4-\frac{445}{2}y^6\Big)+\Big(\frac{18198}{7}x^7+840x^6y$$

$$+684x^5y^2-12210x^4y^3-3000x^3y^4+8769x^2y^5+\frac{13353}{7}y^7\Big)$$

$$+\Big(\frac{376248}{7}x^7y-36939x^6y^2+103984x^5y^3+\frac{30633}{2}x^4y^4$$

$$+30691x^3y^5+47570x^2y^6+\frac{30}{7}xy^7+\frac{65507}{4}y^8\Big),$$

则

$$\left.\frac{dF_1}{dt}\right|_{F_1=10^{-39}}=\Big[-\frac{30}{7}(x^8+y^8)+\varepsilon(\cdots)+\delta(\cdots)+\lambda(\cdots)$$

$$+(x,\ y)_9\Big]_{F_1=10^{-39}}<0.$$

$$F_2=(x^2+y^2)+$$

$$+\Big(\Big(4+\frac{2}{3}\varepsilon\Big)x^3+6x^2y+\Big(6+\frac{4}{3}\varepsilon\Big)y^3\Big)$$

$$+\Big((30+6\varepsilon)x^3y-(5\varepsilon+\varepsilon^2)x^2y^2+\Big(15+\frac{21}{2}\varepsilon+\frac{3}{2}\varepsilon^2\Big)y^4\Big)$$

$$+\Big(\Big(-58-\frac{424}{15}\varepsilon-\frac{14}{3}\varepsilon^2-\frac{4}{15}\varepsilon^3\Big)x^5-(30+6\varepsilon)x^4y$$

$$+\Big(50+\frac{10}{3}\varepsilon-\frac{14}{3}\varepsilon^2-\frac{2}{3}\varepsilon^3\Big)x^3y^2-\Big(190+\frac{274}{3}\varepsilon+\frac{52}{3}\varepsilon^2$$

$$+\frac{4}{3}\varepsilon^3\Big)x^2y^3+\Big(-28+\frac{346}{15}\varepsilon+\frac{226}{15}\varepsilon^2+\frac{28}{15}\varepsilon^3\Big)y^5\Big)$$

$$+\Big(\Big(-840-417\varepsilon-\frac{339}{5}\varepsilon^2-\frac{18}{5}\varepsilon^3\Big)x^5y$$

$$+\Big(435+417\varepsilon+\frac{383}{3}\varepsilon^2+\frac{47}{3}\varepsilon^3+\frac{2}{3}\varepsilon^4\Big)x^4y^2$$

$$+\Big(-630-391\varepsilon-\frac{917}{9}\varepsilon^2-\frac{128}{9}\varepsilon^3-\frac{8}{9}\varepsilon^4\Big)x^3y^3$$

$$+\left(\frac{-1155}{2}-323\varepsilon-\frac{217}{3}\varepsilon^2-\frac{31}{3}\varepsilon^3-\frac{5}{6}\varepsilon^4\right)x^2y^4$$

$$+\left(-\varepsilon-\frac{11}{5}\varepsilon^2-\frac{2}{5}\varepsilon^3\right)xy^5$$

$$+\left(-\frac{445}{2}-47\varepsilon+\frac{211}{3}\varepsilon^2+\frac{85}{3}\varepsilon^3+\frac{17}{6}\varepsilon^4\right)y^6\Big),$$

则

$$\left.\frac{dF_2}{dt}\right|_{F_2=10^{-225}}=\Big[\left(\varepsilon+\frac{11}{5}\varepsilon^2+\frac{2}{5}\varepsilon^3\right)(x^6+y^6)+(\cdots)\delta$$

$$+(\cdots)\lambda+(x,\ y)_7\Big]_{F_2=10^{-225}}>0.$$

取

$$F_3=(x^2+y^2)$$

$$+\left(\left(4+\frac{2}{3}\varepsilon\right)x^3+6x^2y+\left(6-\frac{2}{3}\delta+\frac{4}{3}\varepsilon\right)y^3\right)$$

$$+\Big(\left(30-\frac{1}{3}\delta+6\varepsilon\right)x^3y+(-3\delta-5\varepsilon-\varepsilon^2)x^2y^2$$

$$+\frac{1}{3}\delta xy^3+\left(15-8\delta+\frac{1}{2}\delta^2+\frac{21}{2}\varepsilon-2\varepsilon\delta+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)y^4\Big),$$

则有

$$\left.\frac{dF_3}{dt}\right|_{F_3=10^{-1034}}=\Big[-\frac{1}{3}\delta\,(x^4+y^4)+\lambda(\cdots)$$

$$+(x,\ y)_5\Big]_{F_3=10^{-1034}}<0.$$

最后取

$$F_4=x^2+y^2,$$

则

$$\left.\frac{dF_4}{dt}\right|_{F_4=10^{-3125}}=\Big[\,2\lambda(x^2+y^2)+(x,\ y)_3\,\Big]_{F_4=10^{-3125}}>0.$$

例 2 $a=1$，$l=-6$，$n=1$。则可取

$$\varepsilon=-10^{-108},\ \delta=-10^{-487},\ \lambda=-10^{-1498},$$

使得四个圆半径依次为

$$R_1=10^{-18},\ R_2=^{-122},\ R_3=10^{-499},\ R_4=10^{-1502}$$

之间依次出现三个极限环.

具体作法见原文，在此不再多述。

附录三　四维空间中的二维曲面的计算机处理法

秦 朝 斌

复系统

$$\frac{dw}{dT}=W(w,\ z),\quad \frac{dz}{dT}=Z(w,\ z),\quad (E^*)$$

$$w=u+iv,\quad z=x+iy$$

的积分曲面族

$$F(w,\ z)=\text{const}$$

是四维实空间$(u,\ v,\ x,\ y)$中的二维曲面族．如何计算这些二维曲面，下面是一种方法．

取$dT=e^{i\theta}dr$，$r\geqslant 0$，θ实数$(\text{mod}2\pi)$．

则(E^*)化为

$$\frac{dw}{dr}=e^{i\theta}W(w,\ z),\quad \frac{dz}{dr}=e^{i\theta}Z(w,z).$$

将θ固定，将实部和虚部分开，得到四维实方程组

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U(u,\ v,\ x,\ y) \\ V(u,\ v,\ x,\ y) \\ X(u,\ v,\ x,\ y) \\ Y(u,\ v,\ x,\ y) \end{pmatrix}_\theta.\qquad (E_\theta)$$

过任何一个非奇点的初始点$P^{(0)}=(w^{(0)},\ z^{(0)})=(u^{(0)},v^{(0)},$

$x^{(0)}, y^{(0)})$，固定 θ 方向，对 r 积分，得到一条四维空间中的一维曲线，以 $l(P^{(0)}, \theta)$ 记它．进一步将 θ 由 0 变到 2π，则 $\{l(P^{(0)}, \theta)\}$ 的全体便构成过 $P^{(0)}$ 点的二维积分曲面．

例 由实系统

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -x + lu^2 + 5aux + x^2, \\ \dfrac{dx}{dt} = u(1 + au + (3l+5)x), \end{cases}$$

自然扩展为复系统

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dT} = -z + lw^2 + 5awz + z^2, \\ \dfrac{dz}{dT} = w(1 + aw + (3l+5)z). \end{cases}$$

取 $dT = e^{i\theta} dr = (\cos\theta + i\sin\theta) dr$.

有

$$\begin{cases} \dfrac{bu}{dr} = (-x + lu^2 - lv^2 + 5aux - 5avy + x^2 - y^2)\cos\theta \\ \qquad - (y + 2luv + 5auy + 5avx + 2xy)\sin\theta, \\ \dfrac{dv}{dx} = (-x + lu^2 - lv^2 + 5aux - 5avy + x^2 - y^2)\sin\theta \\ \qquad + (-y + 2luv + 5auy + 5avx + 2xy)\cos\theta, \\ \dfrac{dx}{dr} = (u + au^2 - av^2 + (3l+5)ux - (3l+5)vy)\cos\theta \\ \qquad - (v + 2auv + (3l+5)uy + (3l+5)vx)\sin\theta, \\ \dfrac{dy}{dr} = (u + au^2 - av^2 + (3l+5)ux - (3l+5)vy)\sin\theta \\ \qquad + (v + 2auv + (3l+5)uy + (3l+5)vx)\cos\theta. \end{cases}$$

由这组方程便可以扫描出四维空间中的二维曲面．

为了计算具体化，取 $a = 0.4$，$l = -3$.

已知这个系统有两个实焦点在 $P_1(0,0)$，$P_2(0, 1)$，有极限环绕 P_2. 并已知极限环均应穿过 P_1 及 P_2 的联线段. 因此下面着重研究初值 $P^{(0)}$ 取在

$$w^{(0)}=0, \qquad 0<z^{(0)}<1$$

一段上之点.

进一步取 $\theta=\frac{\pi}{2}$，以便曲线离开实平面，则经计算，发现这些曲线都到达 $P_4(w_4, z_4)$，这里 P_4 是 (E^*) 系统的一个复焦点. P_4 由

$$-z+lw^2+5awz+z^2=0,$$

$$1+aw+(3l+5)z=0$$

联立解出，得 $P_3(w_3, z_3)$ 及 $P_4(w_4, z_4)$.

$$w_{3,4}=\frac{3a(2l+3)\pm(3l+5)\sqrt{9a^2-3l(l+2)}}{l(3l+5)^2-a^2(15l+24)},$$

$$z_{3,4}=\frac{3a^2-l(3l+5)\mp a\sqrt{9a^2-3l(l+2)}}{l(3l+5)^2-a^2(15l+24)}.$$

计算结果见附图(图 16—17)，可以称为寻"根"图，亦即由 $u=v=y=0$，$0<x<1$ 上之点出发，由 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的方向，可以用计算机追寻出过这些点的曲面的"根"在 P_4 点.

如果取 $r<0$，或者取 $\theta=-\frac{\pi}{2}$，则由共轭复数的性质，到达 P_3.

故 P_3 及 P_4 均为曲面族的"根".

这样，具有两个实焦点(其中一个为三阶细焦点)的 (E_2) 的极限环的有根性便被发现了，其根即在两有限复奇点处.

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dT}=z(aw+bz+c)+(w^2+z^2-1), \\ \dfrac{dz}{dT}=-w(aw+bz+c), \end{cases} \qquad a=1,\ b=-2,\ c=3.$$

$$\begin{cases} w_4=-0.6+i0.8, \\ z_4=1.2+i0.4, \end{cases} \qquad \begin{cases} dT=e^{i\theta}dr \\ \theta=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

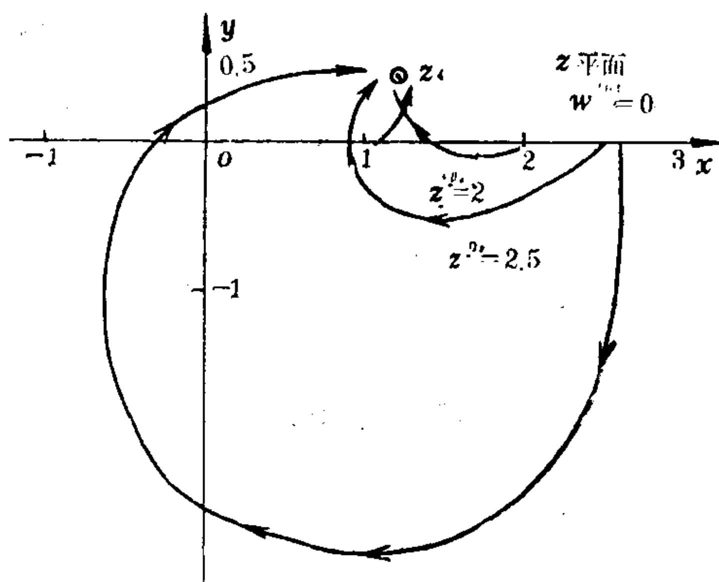


图 12

$$1\leqslant z^{(0)}\leqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

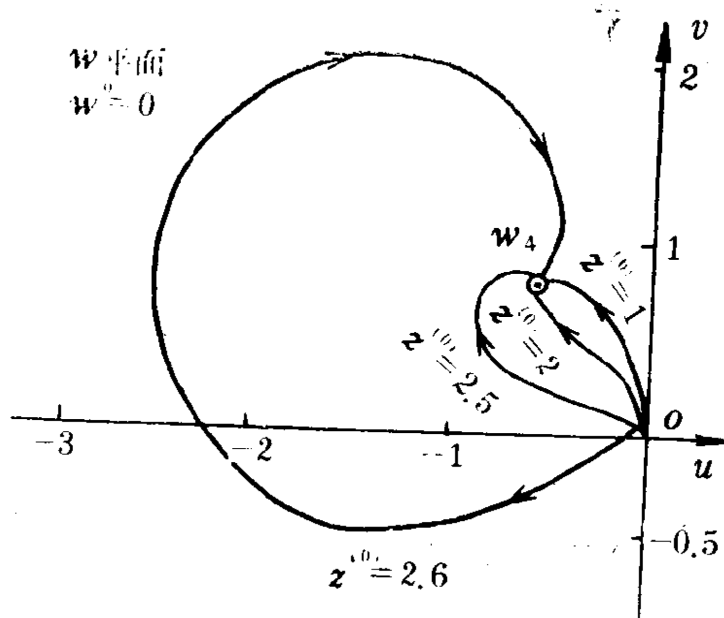


图 13

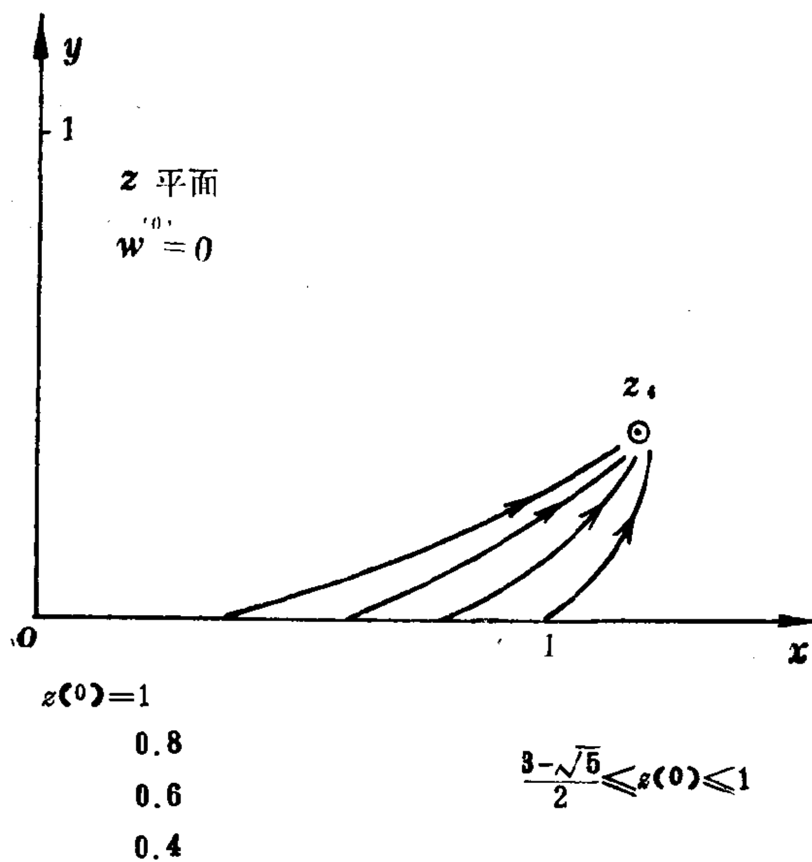

y
1
z 平面
$w^{(0)}=0$
z_4
O
1
x
$z^{(0)}=1$
0.8
0.6
0.4
$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant z^{(0)}\leqslant 1$

图 14

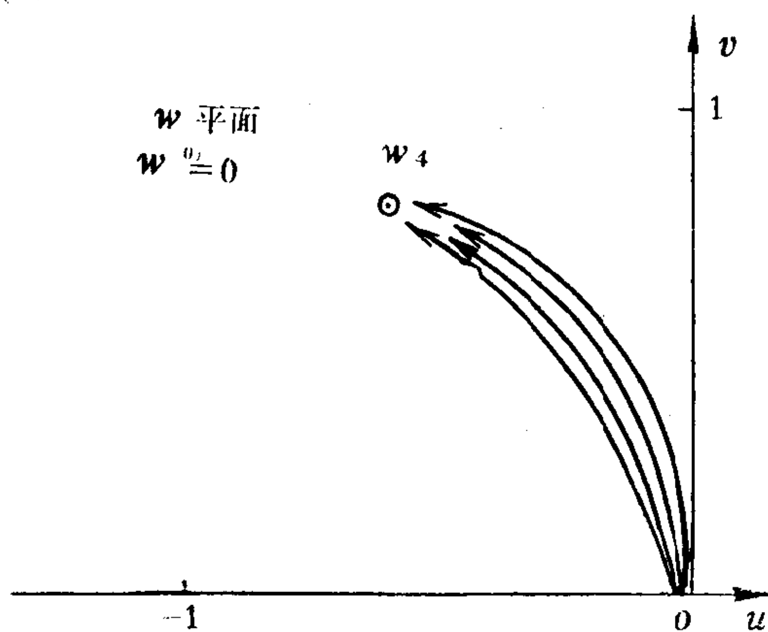

v
1
w 平面
$w^{(0)}=0$
w_4
−1
0
u

图 15

寻“根”图

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dT} = -z + lw^2 + 5awz + z^2, \\ \dfrac{dz}{dT} = w(1 + aw + (3l+5)z), \end{cases}$$

$a=0.4,\ l=-3.$

$$\begin{cases} w_4 = \dfrac{3.6 - 4\sqrt{7.65}\,i}{44.64} = 0.081 - i0.248, \\ z_4 = \dfrac{11.52 - 0.4\sqrt{7.65}\,i}{44.64} = 0.258 - i0.025. \end{cases} \quad \begin{cases} dT = e^{i\theta} dr, \\ \theta = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} w(0) = 0, \\ 0 < z(0) < 1. \end{cases}$$

$0 < r < \infty$

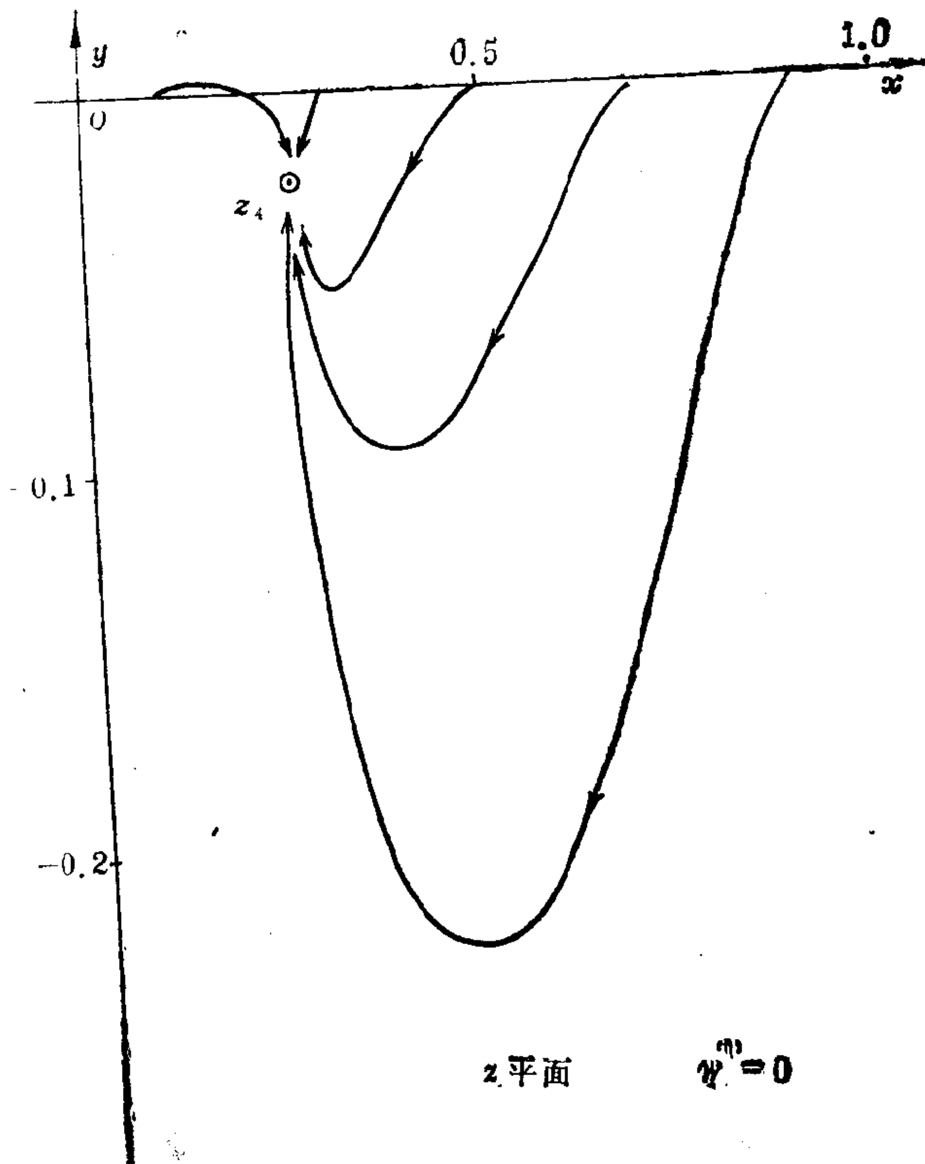


图 16

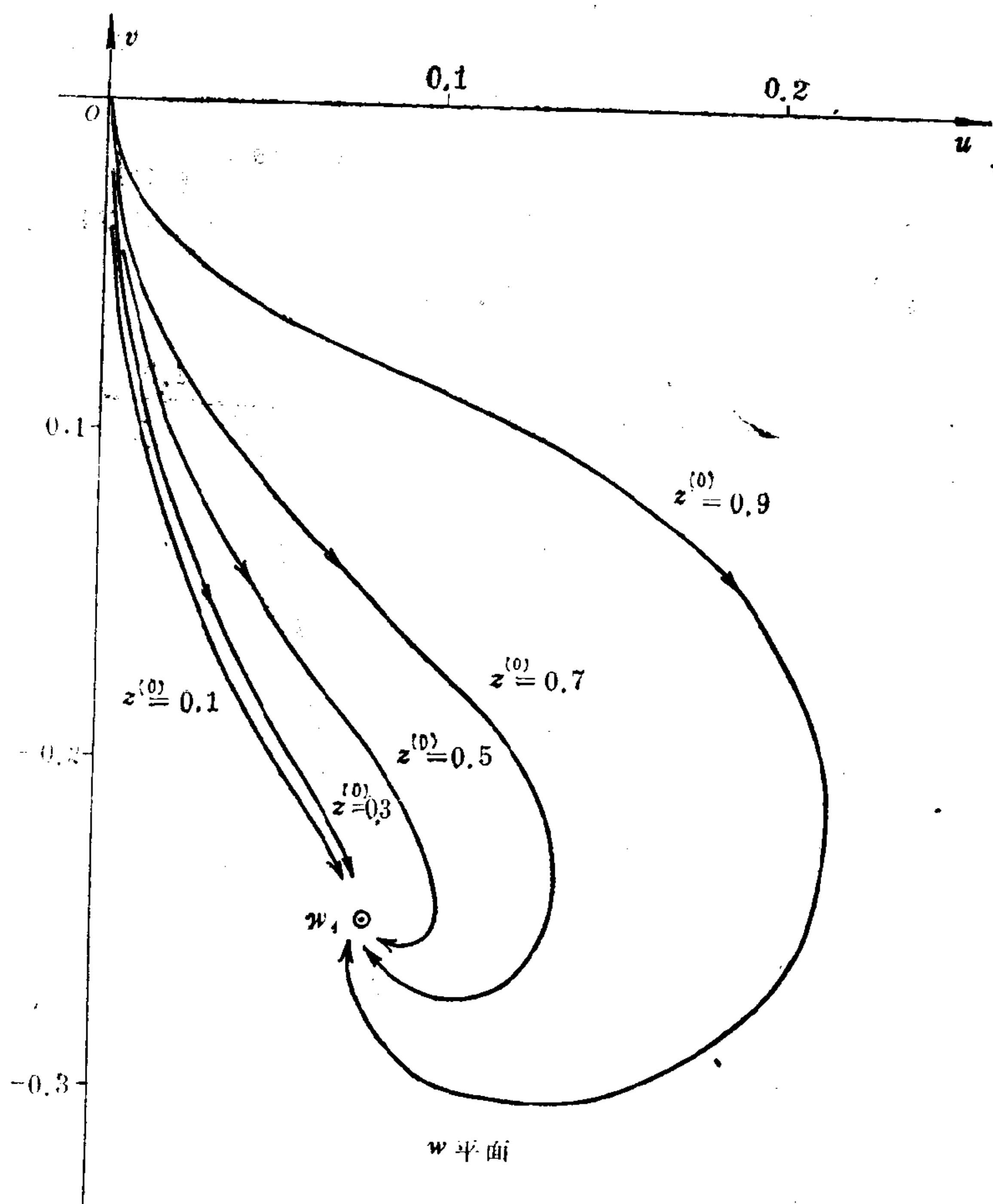


图 17

参 考 文 献

[1] Cajori, A History of Mathematics.

[2] Юшкевич, А. П., Исторический Очерк. (Степанов, Курс Дифференциальных Уравнений.)

[3] Голубев, В. В., Лекции по Аналитической Теории Дифференциальных Уравнений.

[4] Bieberbach, L., Theorie der Gewöhnlichen Differentialgleichungen.

[5] Ince, E. L., Ordinary Differential Equations.

[6] Poincaré H., «Œurves, Tome I.

* * *

[7] 秦元勋:《微分方程所定义的积分曲线》,(1959)科学出版社(上、下册).

[8] 秦元勋:《多重极限环线》,数学学报(1955)2期,257—266.

[9] 秦元勋:《偶重极限环线》,数学学报(1955)2期,269—282.

[10] 秦元勋:《具有二次代数极限环线之方程

$$dy/dx=\sum_{0\leqslant i+j\leqslant 2}a_{ij}x^iy^j/\sum_{0\leqslant i+j\leqslant 2}b_{ij}x^iy^j$$》,

数学学报(1958)1期,143—149.

[11] 董金柱:《方程组$\frac{dx}{dt}=X_2$, $\frac{dy}{dt}=Y_2$的奇点指数分布

与其极限环之位置》,数学学报(1958) 2 期,258—268.

[12] 董金柱：《方程组$\frac{dx}{dt}=X_2$, $\frac{dy}{dt}=Y_2$ 的极限环的位置》, 数学学报(1959) 2 期, 156—169.

[13] 秦元勋、蒲富全：《在平衡点附近$\frac{dx}{dt}=P$, $\frac{dy}{dt}=Q$出现三个极限环的例子(P, Q为二次多项式)》,数学学报(1959) 2 期, 213—226.

[14] 秦元勋、史松龄、蔡燧林：《关于平面二次系统的极限环》,中国科学(1981) 8 期, 929—938.

[15] 秦元勋、索光俭、杜星福：《关于平面二次系统的极限环(Ⅱ)》,中国科学(1983) 4 期, 417—425.

[16] 秦元勋：《关于 D. Hilbert 第 16 问题》,西北大学学报，自然科学版(1982) 2 期, 1—15.

* * *

[17] 秦元勋：《常微分方程的复定性理论(Ⅰ)》,数学研究与应用, (1979) 4 期, 17—33. 中国科学院应用数学研究所 .

[18] 秦元勋：《常微分方程的复定性理论(Ⅱ)》, 数学研究与应用, (1979) 5 期, 18—48.

[19] 秦元勋、何弗勤：《常微分方程的复定性理论(Ⅲ)》, 数学研究与应用, (1980) 1 期, 15—36.

[20] 秦元勋：《常微分方程的复定性理论》,西北大学学报, 自然科学版, (1982) 3 期, 1—18.

[21] 秦元勋：《常微分方程定义的积分曲面》,西北大学学报，自然科学版, (1984) 1 期, 1—16.

* * *

[22] 刘尊全、秦朝斌：《微分方程公式的机器推导(Ⅰ)》 ,

中国科学，(1980) 8 期，812—820.

[23] 刘尊全、秦朝斌：《微分方程公式的机器推导(Ⅱ)》，科学通报，(1981) 5 期，257—258.

[24] 秦元勋、刘尊全：《微分方程公式的机器推导(Ⅲ)》，科学通报，(1981)，388—391.

[25] 秦进水：《微分方程产生极限环的机器推导 DELCPS (Differential Eqnation Producing Limit Cycle Program System)》，将发表.

[26] 秦朝斌：《与复域中的常微分方程解相联系的四维空间中二维曲面的计算机计算法》，将发表.